Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова»
Физический факультет
Кафедра астрофизики и звездной астрономии

# Моделирование структуры аккреционных дисков вокруг замагниченных звезд с наклоненной магнитной осью

# Structure of accretion disk around strongly magnetized stars with tilted magnetic axis

Курсовая работа студента 432 группы А. В. Кузина

Научный руководитель: Г.В. Липунова

Москва - 2022

# Содержание

# 1 Введение

## 1.1 Мотивация

Несмотря на высокую эффективную температуру поверхности нейтронных звезд (НЗ), их трудно или невозможно наблюдать в рентгеновском диапазоне спектра непосредственно из-за малого размера. Основные каналы информации, по которым мы можем отождествлять и изучать НЗ в рентгене, это кривые блеска рентгеновских вспышек (для НЗ в двойных системах с аккреционным диском), хронометрирование (тайминг) пульсаров (для НЗ, как одиночных, так и в кратных системах), а также спектры излучения от систем, содержащих НЗ.

В хорошо изученном процессе дисковой аккреции на черную дыру основное энерговыделение в диске происходит во внутренних частях диска. При дисковой аккреции на замагниченные объекты — нейтронные звезды, белые карлики, звезды типа T Tauri, Ap звезды — вклад в излучение от диска также вносят, в основном, внутренние части диска, где влиянием магнитного поля на вещество нельзя пренебречь (забудем на минуту про процесс самооблучения диска). Поэтому важно изучать структуру аккреционных дисков и влияние магнитного поля на распределение параметров в нем.

В данной работе моделируется вертикальная и радиальная структура, спектры излучения аккреционных дисков вокруг замагниченных звезд, и особое внимание уделяется зависимости полученных результатов от угла наклона магнитной оси центрального объекта к его оси вращения (далее мы будем говорить для определенности про аккрецию на замагниченную нейтронную звезду).

## 1.2 Существующие модели

Существует много работ, в которых авторы моделируют процесс дисковой аккреции на замагниченную звезду. Например, Gosh & Lamb 1979a [1] построили самосогласованную модель “переходного слоя” — области диска, в которой магнитное поле звезды проникает в вещество и влияет на его движение.

В статьях Ghosh et al. 1977 [2], Gosh & Lamb 1979a, b [1], [3] авторы построили модель взаимодействия магнитного поля нейтронной звезды с веществом в диске и показали, что она удовлетворительно согласуется с имевшимися тогда наблюдениями замедления вращения НЗ в рентгеновских двойных. Wang 1987 [4], однако, показал, что модель магнитного поля Гоша и Лэмба не самосогласованна, и давление такого магнитного поля разрушило бы диск на больших расстояниях от центра. Кроме того, по современным представлениям линии магнитного поля, которые проникают в диск в областях, где диск вращается заметно медленнее магнитосферы НЗ, могут перезамыкаться и, как следствие, размыкаться, уходя на бесконечность (Lovelace et al. 1995 [5]). Этот эффект также не был учтен в цикле работ Gosh & Lamb.

В работе Campbell 1992 [6] автор провел подробный анализ слагаемых, появляющихся в уравнениях движения при учете магнитного поля, рассмотрел случай вязкости, зависящей только от расстояния до НЗ, и $\alpha$-вязкости (впрочем, не называя её так). Из его анализа, например, следует, что можно пренебречь наведенными магнитным полем по $r$ и $z$ координатам (см, однако, Naso & Miller 2010, 2011 [7], [8]), чем мы будем пользоваться в этой работе, а также что скорость в диске везде можно считать равной кеплеровской (см. раздел 5 для обсуждения).

Campbell & Heptinstall 1998a,b [9], [10] исследовали вертикальную структуру аккреционных дисков вокруг замагниченных звезд, принимая во внимание разные механизмы диссипации магнитного поля в диске — турбулентной магнитной диффузии или всплывания магнитного поля. Показано, что результаты расчета вертикальной структуры не сильно зависят от выбранного механизма. В работе Campbell 2009 [11] построена модель разрушения аккреционного диска на некотором расстоянии от звезды быстро возрастающим давлением магнитного поля, которое более нельзя уравновесить компонентой силы притяжения по оси $z$.

В вышеназванных работах “вязкость” диска считалась не зависящей от магнитного поля, что не согласуется с современными представлениями о турбулентном механизме переноса углового момента (Balbus & Hawley 1991 [12], см. также обзор Balbus & Hawley 1998 [13]).

Tessema & Torkelsson 2010 [14] построили модель тонкого $\alpha$-диска вокруг замагниченной звезды, попытавшись учесть крупномасштабную структуру магнитного поля, которая предположительно может возникать из-за турбулентного динамо (Hawley et al. 1996 [15]). Они ввели функцию $\Lambda(r)$, описывающую отличие струкуры диска от стандартного, и показали, что задача может быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно этой функции.

Во всех вышеперечисленных работах принималась модель дипольного магнитного поля нейтронной звезды с магнитным моментом, сонаправленным с осью вращения звезды: угол $\chi = \backslash(\vec{\mu}_m, \vec{\omega_s}) = 0$. Поскольку мы регистрируем периодические импульсы от НЗ в системах с аккреционным диском, это предположение не оправдывается. В работе Wang 1997 [16] исследовано влияние $\chi$ на скорость изменения периода вращения НЗ. В работе Bozzo et al. 2018 [17] было изучено поведение внутреннего радиуса диска в зависимоси от $\chi$, пользуясь выведенными в Wang 1997 уравнениями.

Цель настоящей работы — рассчитать радиальную и вертикальную структуру стационарного аккреционного диска в общем случае несоосного ротатора.

Работа организована следующим образом. В разделах 2 и 4 мы приводим краткий обзор существующих моделей взаимодействия аккреционного диска и магнитного поля и описываем модели, которыми пользуемся в этой работе. Основные уравнения выписаны в разделе 3. Мы кратко исследовали возможность отклонения угловой скорости вещества от кеплеровской в разделе 5. Уравнение по $\phi$-координате, управляющее переносом углового момента в диске, решено в разделе 6, а в разделе 7 проанализирован спектр от аккреционного диска. Уравнения вертикальной структуры выписаны и решены в разделе 8. В следующем разделе 9 проанализирован профиль диска. Наконец, в разделе 10 подводятся итоги работы и суммируются основные результаты.

## 2 Модель диска

Всюду далее в работе используется цилиндрическая система координат $(r, \phi, z)$.

Существует несколько подходов к описанию турбулентного механизма переноса углового момента в аккреционных дисках. Можно ввести некоторый эффективный коэффициент — "коэффициент турбулентной вязкости" $\nu_t$, а уравнения движения для вещества записывать с этим коэффициентом вязкости обычным образом, будто для ламинарного потока. В таком подходе, однако, непонятно, почему поток с развитой турбулентностью можно заменить ламинарным, просто введя единственный эффективный коэффициент. С другой стороны, если аккуратно ввести понятие тензора вязких напряжений $W_{r\phi}$, можно получить уравнения для турбулетного переноса углового момента, совпадающие по виду с уравнениями для ламинарного движения (см. обзор Balbus & Hawley 1998 [13] для детального обсуждения). Для стандартного диска, например, получается обычное уравнение (знак $W_{r\phi}$ изменен по сравнению с Balbus & Hawley 1998, чтобы уравнение совпадало с уравнением из статьи Shakura & Sunyaev 1973 [18]):

$$\frac{\dot{M}}{2\pi} r^2 \Omega(r) + W_{r\phi} r^2 = const. \tag{2.1}$$

В этой работе мы старались не использовать понятие "коэффициент вязкости" и оперировать только понятием "тензор вязких напряжений", поскольку такой подход кажется более физически обоснованным.

В настоящей работе в качестве модели аккреционного диска и его взаимодействия с магнитным полем принимается модель, предложенная в статье Klu$\acute{z}$niak & Rappaport 2007 [19] (далее — KR07) и модифицированная нами для случая наклоненного магнитного ротатора. Аккреционный диск — стационарный и геометрически тонкий, оптически толстый альфа-диск. Вслед за KR07 мы предположили, что существует некоторый внутренний радиус вязкого аккреционного диска $r_0$, на котором обнуляется тензор вязких напряжений $W_{r\phi}$ . При этом в переходной зоне $R_{\mathrm{max}} < r < r_0$ вязкие напряжения отсутствуют, и движение вещества управляется только электромагнитными силами. Здесь за $R_{\mathrm{max}}$ обозначен максимум из радиуса НЗ $R_{\mathrm{s}}$ и радиуса последней устойчивой орбиты $R_{\mathrm{ISCO}}$:

$$R_{\mathrm{max}} = max(R_{\mathrm{s}}, R_{\mathrm{ISCO}}), \tag{2.2}$$

а радиус последней устойчивой орбиты $R_{\mathrm{ISCO}}$ находился из предположения о геометрии Шварцшильда:

$$R_{\mathrm{ISCO}} = \frac{6GM_s}{c^2}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что внутренний радиус диска не может быть меньше ни радиуса НЗ $R_{\mathrm{NS}}$, ни радиуса последней устойчивой орбиты $R_{\mathrm{ISCO}}$. Если предположить, что угловая скорость вещества в переходной зоне гладко сшивается с угловой скоростью вещества вязкого диска ровно в точке $r = r_0$, можно найти как профиль угловой скорости в переходной зоне $\Omega_{\mathrm{trans}}(r)$, так и положение радиуса обрезания вязкого диска $r_0$. Внутренний радиус диска $r_{\mathrm{in}}$ считался равным

$$r_{\mathrm{in}} = max(R_{\mathrm{max}}, r_0). \tag{2.4}$$

Если магнитное поле внутри и вне диска задано, то, аналогично уравнению (2.1), можно найти распределение вязких напряжений в диске, не прибегая больше ни к каким предположениям (см. раздел 6).

Следуя KR07, мы считаем, что вся энергия, выделяющаяся в диске как тепло, выделяется за счет вязких сил. Джоулево тепло не включено в модель, поскольку нет точных моделей проводимости плазмы в аккреционных дисках. Помимо этого неясно, какая доля джоулева тепла действительно высвобождается в диске, а какая — посредством нетепловых процессов над диском. Так как в принятой модели переходной зоне $W_{r\phi} = 0$, было решено не находить профиль угловой скорости вещества в переходной зоне $\Omega_{\text{trans}}(r)$, поскольку неясно, какие приложения будут у такого результата — красивого и, что замечательно, аналитического.

Для рассчета вертикальной стртуктуры принимается $\alpha$-параметризация тензора вязких напряжений (Shakura 1972 [20], Shakura & Sunyaev 1973 [18]), причем $\alpha$-параметр фигурирует в уравнениях как свободный параметр задачи, то есть структура магнитного поля не учитывается самосогласованно с моделью турбулентности в диске.

Вместо самосогласованного МГД-подхода для нахождения магнитного поля в аккреционном диске (такой подход применяется, например, в цикле статей Naso & Miller 2010, 2011 [7], [8], Naso et al. 2013 [21]) мы выбрали две физически оправданные модели магнитного поля, и уравнения движения вещества исследовались “на фоне” заданных магнитных полей.

# 3 Основные уравнения

Запишем уравнения движения для вещества в диске. Уравнение Навье-Стокса с учетом магнитного поля:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\,\mathbf{r}\,)\vec{v}=\quad\frac{1}{\rho}\,\mathbf{r}\,\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{B}\quad\frac{1}{\rho}\,\mathbf{r}\,\Phi_g+\vec{N}, \tag{3.5}$$

где

$$\rho N_r=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial w_{r\phi}}{\partial\phi}\quad\frac{w_{\phi\phi}}{r}+\frac{\partial w_{rz}}{\partial z}, \tag{3.6}$$

$$\rho N_\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2w_{r\phi})+\frac{1}{r}\frac{\partial w_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial w_{\phi z}}{\partial z}, \tag{3.7}$$

$$\rho N_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_{zr})+\frac{1}{r}\frac{\partial w_{z\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial w_{zz}}{\partial z}. \tag{3.8}$$

Здесь $w$ — удельный тензор вязких напряжений, $\Phi_g$ — гравитационный потенциал центральной звезды (мы пренебрегаем самогравитацией диска):

$$\Phi_g=\quad\mathbf{p}\frac{GM_s}{r^2+z^2}. \tag{3.9}$$

Для тонкого диска лишь $r\phi$-компонента тензора важна (Kato et al. 2008 [22]), и в уравнениях движения мы сохраним только ее.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0. \tag{3.10}$$

Рассмотрим случай стационарной аккреции. Тогда $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$ и проекции уравнения Навье-Стокса на оси $(r,\phi,z)$ цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases}(\vec{v}\,\mathbf{r}\,)v_r\quad\frac{v_\phi^2}{r}=\quad\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\vec{e_r}\quad(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{B}\quad\frac{GM_s}{r^2},\\ (\vec{v}\,\mathbf{r}\,)v_\phi+\frac{v_rv_\phi}{r}=\quad\frac{1}{\rho r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(r^2w_{r\phi})+\frac{1}{4\pi\rho}\vec{e_\phi}\quad(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{B},\\ (\vec{v}\,\mathbf{r}\,)v_z=\quad\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)\quad\frac{1}{\rho}\frac{GM_s}{r^3}z+\frac{1}{4\pi\rho}\vec{e_z}\quad(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{B}.\end{cases} \tag{3.11}$$

Далее мы по очереди рассмотрим каждое из этих уравнений. Поскольку мы приняли предположение о аксиальной симметрии системы, каждое из этих уравнений надо будет усреднить по азимутальному углу $\phi$. Для произвольной величины $x$, зависящей от координат, мы определяем усреднение по азмутальному углу следующим образом:

$$\mathsf{h}x\mathsf{i}_{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(r,\phi,z)d\phi. \tag{3.12}$$

Такая процедура оправдана, поскольку период вращения НЗ много меньше времен установления равновесия в диске и по вертикали, и по радиусу. Уравнение по $\phi$-координате мы еще проинтегрируем по оси $z$. Для этого нам надо сделать конкретные предположения о структуре магнитного поля, чему и посвящен следующий раздел.

# 4 Магнитное поле

## 4.1 Обозначения

Мы принимаем модель системы НЗ с аккреционным диском, в которой ось вращения НЗ сонаправлена с осью аккреционного диска. Оправдание этому — упрощение расчетов, но заметим, что в реальности это может быть не так. Введем обозначение: пусть $\beta$ — угол между осями вращения НЗ и диска. Магнитные напряжения в диске стремятся изогнуть внутренние части диска и устремить $\beta \to \pi/2$ в случае $\cos^2\beta > 1/3$ (наш случай $\beta = 0$ как раз такой) или устремить $\beta \to 0$ в случае $\cos^2\beta < 1/3$. (см. Lipunov & Shakura 1980 [23] и Lai 1999 [24] для обзора общего случая с произвольным наведенным магнитным полем и ссылки там). С другой стороны, магнитный эффект Бардина-Петерсона всегда стремится выровнять векторы угловых скоростей НЗ и аккреционного диска (Lai 1999 [24]).

В работе Romanova et al. 2021 [25] авторы численно промоделировали эволюцию диска вокруг замагниченной звезды с несонаправленными векторами магнитного момента $\vec{\mu}_m$, угловой скорости вращения $\vec{\omega}_s$ и момента импульса диска $\vec{I}_d$. Из их расчетов следует, что если магнитное поле слабо проникает в диск, то $\vec{\omega}_s$ и $\vec{I}_d$ действительно стремятся выровняться, но, если магнитное поле сильно взаимодействует с диском, то угол между $\vec{\omega}_s$ и $\vec{I}_d$ может быть равен $30 - 40$ даже через большое время после начала симуляции. В нашей работе предположение о $\beta = 0$ требуется для упрощения вычислений.

В настоящей работе используются следующие обозначения. Радиус коротации — это расстояние, на котором кеплеровская угловая скорость равна угловой скорости вращения НЗ:

$$r_c = \left(\frac{GM_s}{\Omega_s^2}\right)^{1/3}, \tag{4.13}$$

где $\Omega_s$ — угловая скорость вращения НЗ.

Характерный радиус магнитосферы, который мы в дальнейшем будем называть альфвеновским радиусом:

$$r_a = \left(\frac{\mu_m^2}{\dot{M}\sqrt{2GM_s}}\right)^{2/7}, \tag{4.14}$$

где $\dot{M}$ — темп аккреции, $M_s$ — масса НЗ, $\mu_m$ — магнитный дипольный момент НЗ, см. далее.

Параметр быстроты $\omega$ определен как отношение угловой скорости НЗ $\Omega_s$ к кеплеровской угловой скорости на расстоянии $r_0$:

$$\omega = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = \left(\frac{r_0}{r_c}\right)^{3/2}. \tag{4.15}$$

Следуя KR07, определим параметр $\xi$ как

$$\xi = \frac{r_a}{r_c}. \tag{4.16}$$

Этот параметр зависит только от темпа аккреции, который в нашей работе фигурирует как внешний параметр, и характеристик НЗ. Для него справедлива оценка:

$$\xi = 0.39\mu_{26}^{4/7}\dot{M}_{17}^{-2/7}M_{1.4}^{-10/21}f_{200}^{2/3}, \tag{4.17}$$

где параметры нормированы на свои характерные значения: $\mu_{26} = \mu_m/(10^{26}$ Гс см$^3)$, $\dot{M}_{17} = \dot{M}/(10^{17}$ г/с$)$, $M_{1.4} = M/1.4M_\odot$, $f$ — частота вращения НЗ: $f_{200} = f/(200$ Гц$)$. Везде далее в этой работе, если не указано иное, считается, что $M_{1.4} = 1$, $f_{200} = 1$.

## 4.2 Модели магнитного поля

В настоящей работе магнитное поле внутри и около диска — это частично экранированное дипольное магнитное поле от нейтронной звезды с магнитным моментом $\vec{\mu_m}$, наклоненным к оси вращения НЗ под углом $\chi$. На поверхности диска динамо-эффектами за счет увлечения магнитных силовых линий веществом наводится тороидальное поле:

$$\vec{B} = \eta_{\mathsf{GL}} \vec{B}_{NS} + \vec{e_\phi} \quad b_\phi, \tag{4.18}$$

$$\vec{B}_{NS} = \frac{3(\vec{\mu}_m \vec{r})\vec{r} \quad \vec{\mu}_m r^2}{r^5}. \tag{4.19}$$

Здесь $\eta_{\mathsf{GL}}$ — это коэффициент экранировки. Такой подход оправдан расчетами в статье Ghosh & Lamb 1979a [1]. Авторы учитывают, магнитное поле может частично экранироватся за счет токов, которые текут в переходной зоне, и находят оценку: поле около диска равно дипольному полю, которое было бы в этой точке, ослабленное примерно в 5 раз. Следуя GL, $\eta_{\mathsf{GL}}$ принимается равным $0.2$ во всей работе.

Разные модели для наведенного поля $b_\phi$ обсуждаются далее.

В цилиндрических координатах компоненты экранированного дипольного магнитного поля НЗ около плоскости $z = 0$ равны:

$$\begin{cases} B_r = 2\eta_{\mathsf{GL}} \frac{\mu_m}{r^3} \sin\chi \cos\phi, \\ B_{\phi 0} = \eta_{\mathsf{GL}} \frac{\mu_m}{r^3} \sin\chi \sin\phi, \\ B_z = \quad \eta_{\mathsf{GL}} \frac{\mu_m}{r^3} \cos\chi. \end{cases} \tag{4.20}$$

Ниже нам понадобится еще квадрат модуля магнитного поля, который легко вычислить как $B^2 = (\vec{B} \quad \vec{B})$:

$$B^2 = \eta_{\mathsf{GL}}^2 \frac{\mu_m^2}{r^6} \left(3\sin^2\chi\cos^2\phi + 1\right) + 2B_{\phi 0} b_\phi + b_\phi^2. \tag{4.21}$$

Введем две параметризации магнитного поля. Для наглядности вывода воспользуемся принципом частичной “вмороженности” линий магнитного поля в вещество в диске. Диск вращается дифференциально, более того, в разделе 5 будет показано, что угловую скорость вещества можно считать равной кеплеровской. Представим изначально вертикальную силовую линию магнитного поля, вмороженную в диск. В начальный момент времени “разрешим” диску вращаться. Линия поля, следуя за веществом, изогнется, и появится тороидальная составляющая магнитного поля. Логично предположить, что величина этого поля, как и его направление, должно определяться угловой скоростью точки диска, в которую вморожена линия, относительно нейтронной звезды. Рисунок 1 поясняет сделанные рассуждения. Так, получим, что

$$b_\phi \quad B_p \quad (\Omega_k \quad \Omega_s), \tag{4.22}$$

где $B_p$ — полоидальное (в плоскости $r \quad z$) магнитное поле.

Особый интерес (см. раздел 6) для нас представляет вид наведенного поля на поверхности диска (upper), на внутреннем краю диска (inner) и внутри диска (inside). Lai 1999 [24] показал, что до тех пор, пока присутствует ненулевое поле $B_z$, можно не учитывать вклад в наведенное поле от $B_r$, поскольку по сравнению с вкладом от $B_z$ он будет пропорционален малой величине — относительной толщине диска $z/r$. Таким образом, имеет смысл на поверхности диска записать:

$$b_\phi^{\mathsf{upper}} \quad B_z \quad (\Omega_k \quad \Omega_s). \tag{4.23}$$

На внутреннем же краю диска, если представить его как резкий вертикальный край (что, разумеется, неправда!), вклад в наведенное поле дает лишь $B_r$. Поле внутри диска мы считаем

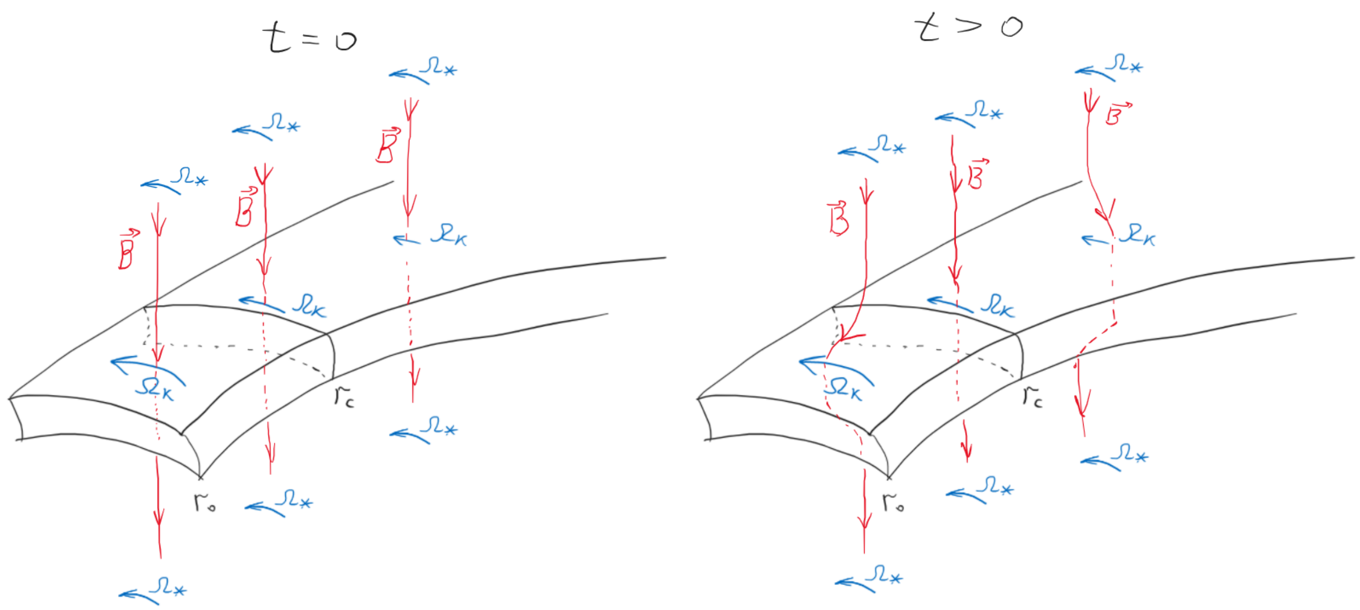



Рис. 1: Линии магнитного поля, вмороженные в вещество аккреционного диска. В начальный момент времени линии вертикальны. Вещество в диске вращается с кеплеровой угловой скоростью, а в короне над диском — с угловой скоростью звезды $\Omega_s$. Из-за разности этих скоростей линия вытягивается, генерируется тороидальное магнитное поле. На радиусе коротации $r_c$ эти скорости равны: $\Omega_s = \Omega_k(r_c)$, поэтому наведенное поле равно нулю на радиусе коротации.

равным нулю[1]. Суммируя все вышесказанное, запишем два немного различающихся варианта того, как можно определить наведенное поле (см. также Wang 1997 [16]):

$$b_\phi^I = \begin{cases} \Gamma\left(1 \quad \frac{k}{s}\right) B_z & \text{upper}, z = z_0, \\ \quad \Gamma\left(1 \quad \frac{k}{s}\right) B_r & \text{inner}, r = r_0, \\ 0, & \text{inside}. \end{cases} \tag{4.24}$$

$$b_\phi^{II} = \begin{cases} \quad \Gamma\left(1 \quad \frac{s}{k}\right) B_z & \text{upper}, z = z_0, \\ \Gamma\left(1 \quad \frac{s}{k}\right) B_r & \text{inner}, r = r_0, \\ 0, & \text{inside}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Здесь $\Gamma$ это коэффициент динамо порядка единицы. Подчеркнем, что приведенные выше выражения — это еще не модели поля, а лишь параметризации, из которых можно конструировать физически оправданные модели.

Wang 1995 [26] предлагает три модели наведенного поля, различающиеся механизмом диссипации магнитного поля. Примем две такие модели из его работы: модель, в которой рост $B_\phi$ компенсируется диссипацией поля из-за турбулетного перемешивания в диске (мы будем

[1]Вообще говоря, для того, чтобы получить уравнения движения так, как это будет сделано в разделе 6, необязательно считать $b_\phi$ равным нулю внутри диска. В довольно общем случае наведенного поля естественно предположить, что $b_\phi$ зеркально относительно экваториальной плоскости, то есть $b_\phi(z) = \; b_\phi( \; z)$. Это предположение следует из интерпретации индуцированного поля как изгиба линий магнитного поля из-за их вмороженности в вещество. В уравнениях раздела 6 мы будем интегрировать уравнение движения по $z$-координате, и тогда, пользуясь нечетностью $b_\phi(z)$, можно показать, что уравнения движения останутся такими же, как если бы наведенное поле внутри диска было бы равно нулю.

называть эту модель просто моделью диффузии), и модель, в которой рост $B_\phi$ ограничен пересоединением магнитных линий снаружи диска (такая модель будет далее называться моделью пересоединения).

Модель “диффузии” предполагает, что $b_\phi = b_\phi^{II}$ во всем диапазоне расстояний. В статье Bozzo et al. 2018 ( [17]) получено аналитическое выражение для зависимости внутреннего края вязкого диска $r_0$ от $\chi$ в такой модели, так что будет интересно сравнить их результаты с нашими. Эта модель хороша по двум причинам. Во-первых, она простая, поэтому в дальнейшем в работе для получения большинства аналитических результатов мы будем пользоваться именно ей. Во-вторых, наведенное поле в этой модели остается конечным при $r \to 0$. Однако, такая модель обладает неприятным свойством: при $r \to \infty$, $|b_\phi| \gg |B_z|$. Но $b_\phi$ не может превосходить $B_z$, так как когда $b_\phi$ сравнивается с $B_z$, линии магнитного поля перезамыкаются и уходят на бесконечность (KR07). То есть наведенное поле $|b_\phi|$ не может сильно превосходить по модулю вертикальную компоненту поля $|B_z|$.

В модели пересоединения (Wang 1995 [26]) учитываются приведенные выше соображения. Наведенное поле в этой модели таково:

$$b_\phi = \begin{cases} b_\phi^{II} & r < r_c, \\ b_\phi^{I} & r > r_c. \end{cases} \qquad (4.26)$$

В такой модели индуцированное поле конечно и при $r \to 0$, и при $r \to \infty$. Отметим, что для случая $\chi = 0$ KR07 рассмотрели две модели: модель с I параметризацией во всем пространстве и модель, совпадающую с моделью пересоединения.

# 5 Влияние магнитного поля на угловую скорость

Все перечисленные в разделе 1.2 работы принимали гипотезу о том, что магнитное поле слабо влияет на движение вещества, поэтому угловую скорость в диске можно всюду считать равной кеплеровской скорости. Оценим, насколько справедливо такое предположение. Угловой скоростью “управляет” первое уравнение в (3.11), исследуем его.

Для этого пренебрежем членами $(\vec v\,\mathbf{r})v_r$ и всеми вязкими членами, поскольку они малы по сравнению с оставшимися в стандартной модели дисковой аккреции. Действительно: $v_r \quad \alpha v_\phi (z/r)^2 \quad v_\phi$ (см., например, Shakura et al., 1 глава, [27]), в то время как $GM/r \quad v_\phi^2/r$, а магнитными членами мы на этом этапе не пренебрегаем в любом случае. Пренебрежем также членом $\frac{\partial P}{\partial r}$ в этом уравнении. Предполагается, что здесь и далее поле давления и поле скоростей осесимметричны.

Немного преобразований:

$$\vec{e_r} \quad (\vec B\,\mathbf{r})\vec B = (\vec B\,\mathbf{r})B_r \quad \vec B \quad (\vec B\,\mathbf{r})\vec{e_r} = B_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} + B_z\frac{\partial B_r}{\partial z} \quad \frac{B_\phi^2}{r}. \tag{5.27}$$

В этих и последующих уравнениях мы используем подобные соотношения для упрощения вычислений:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = \quad \frac{3B_r}{r}, \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial \phi} = \quad 2B_{\phi 0}, \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \quad 3\frac{z}{r}\frac{B_r}{r}. \tag{5.30}$$

Теперь усредним анзац (5.27) по азимутальному углу $\phi$ 2 $[0, 2\pi]$. Наконец с предположением, что $hB_{\phi 0} b_\phi i_{2\pi} = 0$ (наведенное тороидальное поле не коррелировано с дипольным тороидальным “фоном”) получаем:

$$\Omega^2 r = \Omega_k^2 r \quad \frac{3}{4\pi\rho}\frac{\eta_{\mathrm{GL}}^2\mu_m^2}{r^7}\cos^2\chi + \frac{1}{8\pi\rho r^2}\frac{d}{dr} h r^2 b_\phi^2 i_{2\pi}. \tag{5.31}$$

Это довольно интересный результат. Если не учитывать наведенное поле внутри диска, то угловая скорость всегда меньше кеплеровской. Действительно, градиент магнитного давления $\mathbf{r}\,(B^2/8\pi)$ всегда направлен к центру, к точке $r = 0$. Такая сила всегда действует противоположно гравитационному притяжению и стремится уменьшить угловую скорость. В обеих моделях, которые мы исследуем в этой работе, наведенное поле внутри диска равно нулю, и для $\Omega$ из (5.31) сразу следует явное выражение. Если поле внутри диска ненулевое и имеет, например, функциональную зависимость такую, как индуцированное поле на поверхности, то из (5.31) следовало бы дифференциальное уравнение на $\Omega$. Зависимость $b_\phi$ от $r$ вблизи радиуса коротации нетривиальна, и угловая скорость может сложно зависеть от расстояния, особенно когда внутренний радиус диска близок к радиусу коротации. Исследование влияния тороидального индуцированного поля на угловую скорость диска представляет интерес и будет проведено в будущем, но выходит за рамки этой работы.

Оценим второй член в уравнении (5.31). Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{\mu_m^2}{4\pi\rho r^7} = \frac{z}{r}\frac{\mu_m^2 V_r}{4\pi\rho z V_r r^6}. \tag{5.32}$$

В рамках стандартного диска справедлива оценка:

$$V_r \quad \alpha V_\phi \left(\frac{z}{r}\right)^2. \tag{5.33}$$

С учетом $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho z V_r$ получаем:

$$\frac{\mu_m^2}{4\pi\rho r^7} \quad \Omega_k^2 \left(\frac{r_a}{r}\right)^{7/2} \alpha \left(\frac{z}{r}\right)^3 . \tag{5.34}$$

Подставляя в оценку $z/r = 0.05$, $\eta_{\mathrm{GL}} = 0.2$, $\alpha = 0.1$, получим:

$$\frac{\mu_m^2}{4\pi\rho r^7} \quad \Omega_k^2 \quad \xi^{7/2} \alpha \left(\frac{z}{r}\right)^3 \left(\frac{r_c}{r}\right)^{7/2} \quad \Omega_k^2 \quad 10 \;{}^{6} \mu_{26}^2 \dot{M}_{17}{}^{1} M_{1.4}{}^{5/3} f_{200}^{7/3} \left(\frac{r_c}{r}\right)^{7/2} . \tag{5.35}$$

Окончательно из уравнений (5.31), (5) получаем:

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega_k}\right)^2 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \;{}^{8} \mu_{26}^2 \dot{M}_{17}{}^{1} M_{1.4}{}^{5/3} f_{200}^{7/3} \left(\frac{r_c}{r}\right)^{7/2} . \tag{5.36}$$

Для темпа аккреции $\dot{M}_{17} = 1$, например, можно считать скорость равной кеплеровской всюду в диске приблизительно для $\mu_{26}$ . $3 \quad 10^3$. Для поля $\mu_{26} = 1$ скорость кеплерова для темпов аккреции $\dot{M}$ & $10^{11}$ г/с.

В работе Campbell 1992 [6] автор обосновал приближение $\Omega \quad \Omega_k$ тем, что относительное отличие этих угловых скоростей будет пропорционально степени $(z/r)^n, n > 1$. Однако мы видим, что для очень больших магнитных полей $\Omega$ отличается от $\Omega_k$. Несмотря на это, настоящая работа не ставит цели исследовать эффекты влияния магнитного поля на скорость вещества, и мы будем предполагать, что разность мала всюду на $r$ 2 $[r_0, +$ 1 $]$ и везде далее $\Omega = \Omega_k$.

# 6 Перенос углового момента

## 6.1 Учет наведенного тороидального магнитного поля

В этом разделе мы подробно обсудим второе уравнение в (3.11) и то, как магнитное поле влияет на характер переноса углового момента.

Раскроем производную по направлению:

$$\vec{e_\phi}\quad (\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{B} = (\vec{B}\,\mathbf{r}\,)B_\phi \quad \vec{B}\quad (\vec{B}\,\mathbf{r}\,)\vec{e_\phi} = B_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + B_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_\phi B_r}{r} =$$

$$= B_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + B_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{B_\phi B_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{B_\phi^2}{2}. \quad (6.37)$$

Теперь с теми же предположениями для $\phi$-компоненты уравнения (аксиальная симметрия поля скоростей и малость $v_z/v_\phi$) с учетом (6.37) получаем из (3.11):

$$\rho r V_r\frac{d\Omega r^2}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r^2 w_{r\phi}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(B_\phi B_r r + r^2 B_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + r^2 B_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\right)$$

$$r\frac{\partial}{\partial \phi}\left(P + \frac{B^2 \quad B_\phi^2}{8\pi}\right). \quad (6.38)$$

Из уравнения неразрывности с предположениями $j v_r j \quad j v_\phi j$ (квази-стандартный геометрически тонкий диск) and $v_z \quad v_\phi$ (без заметных вертикальных течений):

$$\int_z^z \rho r v_r dz = \text{const} = \quad \frac{\dot M}{2\pi}. \quad (6.39)$$

Теперь проинтегрируем ур. (6.38) по z-координате. Вместе с ур. (6.39) и утверждением, что все компоненты магнитного поля не зависят от $z$ вблизи плоскости $z = 0$, это дает:

$$\frac{\dot M}{2\pi}\frac{d}{dr}(\Omega r^2) = \frac{d}{dr}\left(r^2 W_{r\phi}\right) \quad 2zr\frac{\partial}{\partial \phi}\left(P + \frac{B^2 \quad B_\phi^2}{8\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left[2z\left(r^2 B_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + rB_rB_\phi\right) + r^2 B_z B_\phi\Big|_{\ z}^{z}\right]. \quad (6.40)$$

Отметим, что, начиная с этого уравнения, $P, B_r, B_\phi$ — это не локальные давление и компоненты магнитного поля, а некие величины, усредненные по толщине диска.

Заметим, что $B_{\phi 0} j^z_{\ z} = 0$ и $b_\phi j^z_{\ z} = 2\, b_\phi j_z$. Теперь усредним ур. (6.40) по $\phi\ 2\ [0, 2\pi]$. С очевидным соотношением $hB_{\phi 0}B_r i_{2\pi} = 0$ получим:

$$\dot M\frac{d\Omega r^2}{dr} = 2\pi\frac{d}{dr}(r^2 W_{r\phi}) + \frac{z}{r}r^2 hB_r\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right) b_\phi i_{2\pi} + r^2 hB_z b_\phi^{\text{upper}} i_{2\pi}. \quad (6.41)$$

В важном частном случае отсутствия всякого наведенного магнитного поля это уравнение становится обычным уравнением Шакуры-Сюняева для переноса углового момента. Заметим, что это уравнение слегка отличается от уравнения 6 в работе Wang 1997 [16], поскольку в упомянутой работе при выводе уравнения предполагалась соленоидальность магнитного поля. Магнитное поле, разумеется, обязано быть соленоидальным, но в работе Wang 1997, как и в нашей работе, div$\vec B \neq 0$ на внутреннем радиусе. Мы решили не использовать условие соленоидальности магнитного поля и получили уравнение, отличающееся лишь членом при малом параметре $z/r$. Таким образом, различие в подходах, использующих или не использующих условие соленоидальности, несущественно для членов нулевого порядка по $(z/r)$. Аналогичная ситуация будет и при получении уравнения для положения внутреннего радиуса (см. следующий параграф).

Дальнейший анализ без конкретизации наведенного поля $b_\phi$ затруднен.

## 6.2 Внутренний радиус вязкого диска

Теперь, работая в рамках моделей диффузии и пересоединения, выведем выражения для зависимости внутреннего радиуса $r_0$ от параметров системы — от параметра $\xi = r_a/r_c$. Для этого запишем уравнение (6.41) на внутреннем радиусе вязкого диска.

Приведем пример подробного расчета для наведенного поля в случае II (случай I рассматривается аналогично). Интересно исследовать случай II, поскольку именно он был исследован Bozzo et al. 2018 [17]). Используем некоторые вспомогательные выкладки:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(1 \quad \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right) B_r = \quad 3\frac{B_r}{r}\left(1 \quad \frac{\Omega_s}{2\Omega_k}\right), \tag{6.42}$$

$$hB_r \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right)\bigg|_{r_0} b_\phi i_{2\pi} = \left(\frac{1}{2}\frac{\Omega_s}{\Omega_k} \quad 2\right) hB_r^2 i_{2\pi}\bigg|_{r_0} = \left(\frac{1}{2}\frac{\Omega_s}{\Omega_k(r_0)} \quad 2\right)\frac{2\Gamma\eta_{\mathrm{GL}}^2\mu_m^2}{r_0^6}\sin^2\chi. \tag{6.43}$$

Последнее слагаемое в уравнении (6.41) – это

$$hB_z b_\phi^{\mathrm{upper}} i_{2\pi} = \quad \Gamma\left(1 \quad \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right)\frac{\eta_{\mathrm{GL}}^2\mu_m^2}{r^6}\cos^2\chi. \tag{6.44}$$

Наконец, уравнение переноса углового момента, примененное на внутреннем краю диска (случай II), выглядит следующим образом (здесь и далее $z_0 = z(r_0)$ — полутолщина диска на внутреннем краю):

$$\dot{M}\frac{d\Omega r^2}{dr}\bigg|_{r_0} = 2\pi\frac{d}{dr}(r^2 W_{r\phi})\bigg|_{r_0} + \epsilon\frac{\mu_m^2}{r_0^4}\left[\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_k(r_0)} \quad 1\right)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_k(r_0)} \quad 4\right)\right], \tag{6.45}$$

и то же уравнение в случае I:

$$\dot{M}\frac{d\Omega r^2}{dr}\bigg|_{r_0} = 2\pi\frac{d}{dr}(r^2 W_{r\phi})\bigg|_{r_0} + \epsilon\frac{\mu_m^2}{r_0^4}\left[\left(1 \quad \frac{\Omega_k(r_0)}{\Omega_s}\right)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}\left(4 \quad 7\frac{\Omega_k(r_0)}{\Omega_s}\right)\right]. \tag{6.46}$$

Здесь введено обозначение $\epsilon = \Gamma\eta_{\mathrm{GL}}^2$. Теперь, следуя KR07, определим положение внутреннего края вязкого диска $r_0$, где $W_{r\phi} = 0$. Напоминаем, предполагается, что существует некоторая переходная зона между $R_{\max}$ и $r_0$ в которой $W_{r\phi} \quad 0$, причем угловая скорость в этом регионе гладко сшивается с кеплеровской скоростью на $r = r_0$. Тогда, используя

$$\frac{d}{dr}\left(\Omega_k r^2\right)\bigg|_{r=r_0} = \frac{\Omega_k(r_0) r_0}{2}, \tag{6.47}$$

получаем, как предел уравнений (6.45) и (6.46) при $r \ ! \ r_0 \quad 0$:

$$\dot{M}\frac{\Omega_0 r_0}{2} = \epsilon\frac{\mu_m^2}{r_0^4}\left[(1 \quad \frac{1}{\omega})\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(4 \quad 7\frac{1}{\omega})\sin^2\chi\right], \text{случай I} \tag{6.48}$$

$$\dot{M}\frac{\Omega_0 r_0}{2} = \epsilon\frac{\mu_m^2}{r_0^4}\left[(1-\omega)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(4-\omega)\sin^2\chi\right], \text{случай II} \tag{6.49}$$

Безразмерная запись этих уравнений такова:

$$\frac{1}{2} = \epsilon\xi^{7/2}\omega^{-10/3}\left[(1-\omega)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(7-4\omega)\sin^2\chi\right], \text{случай I} \tag{6.50}$$

$$\frac{1}{2} = \epsilon\xi^{7/2}\omega^{-7/3}\left[(1-\omega)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(4-\omega)\sin^2\chi\right], \text{случай II} \tag{6.51}$$

Таким образом, в диффузионной модели и модели пересоединения внутренний радиус вязкого диска определяется следующим образом (см. рис. 2):

$$r_0 = \begin{cases} \text{решение для случая II} & \text{— в модели диффузии,} \\ \begin{cases} \text{решение для случая II, если } r_0 < r_c \\ \text{решение для случая I, если } r_0 > r_c \end{cases} & \text{— в модели пересоединения.} \end{cases} \tag{6.52}$$

Отметим, что каждое из этих уравнений переходят в соответствующие уравнения KR07 для 'model I' и 'model II' при $\chi \to 0$. При этом нет согласия с выражениями, выведенными Bozzo et al. 2018 [17], поскольку авторы пользовались выражением div$\vec{B} = 0$, что хоть и является законом природы, но неверно́ на внутреннем краю $r = r_0$ в параметризации Bozzo et al. Мы же не прибегали к условию соленоидальности магнитного поля, поэтому получили другие числовые коэффициенты в слагаемом, пропорциональном $z_0/r_0$. Сравним уравнение 6.51 и уравнение 20 в Bozzo et al. 2018. Коэффициенты в квадратных скобках, полученные в этой работе, и в работе Bozzo et al. таковы:

$$\begin{cases} (1-\omega)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(4-\omega)\sin^2\chi & \text{в этой работе,} \\ (1-\omega)\cos^2\chi + \frac{z_0}{r_0}(8-5\omega)\sin^2\chi & \text{в Bozzo et al.} \end{cases} \tag{6.53}$$

В силу того, что отношение $z_0/r_0$ мало (принята модель тонкого диска, дальнейшие расчеты оправдывают это предположение), второе слагаемое важно только при углах, близких к $90^\circ$.

На примере модели диффузии кратко изучим свойства $r_0$ как функции $\xi$ с параметрами $a = \sin\chi^2$ и $\delta_0 = z_0/r_0 \ll 1$. Перепишем уравнение (6.51) в следующем виде:

$$\frac{1}{2\epsilon\xi^{7/2}}\omega^{7/3} = 1 - a(1-4\delta_0) - \omega(1 - a(1-\delta_0)) \tag{6.54}$$

Поскольку слева — быстро растущая степенная функция, а справа — линейно убывающая (для $a(1-\delta_0) < 1$) из положительного значения (для $a(1-4\delta_0) < 1$) функция, их графики всегда пересекаются где-то между $\omega = 0$ и $\omega_{crit}$:

$$\omega_{crit} = \frac{1 - a(1-\delta_0)}{1 - a(1-\delta_0)}, \tag{6.55}$$

то есть уравнение (6.51) всегда имеет решение, притом единственное.

Отметим, что многие другие характеристики этого уравнения могут быть получены аналитически. Например, помимо асимптотического значения $\omega_{crit}$ можно вывести выражение для положения точки бифуркации, в которой кривые $\omega(\xi)$ при различных углах сходятся в одну точку. Автор кается: ему не удалось придумать, какой физический смысл можно приписать такой точке. По этой причине соответствующее выражение не приводится.

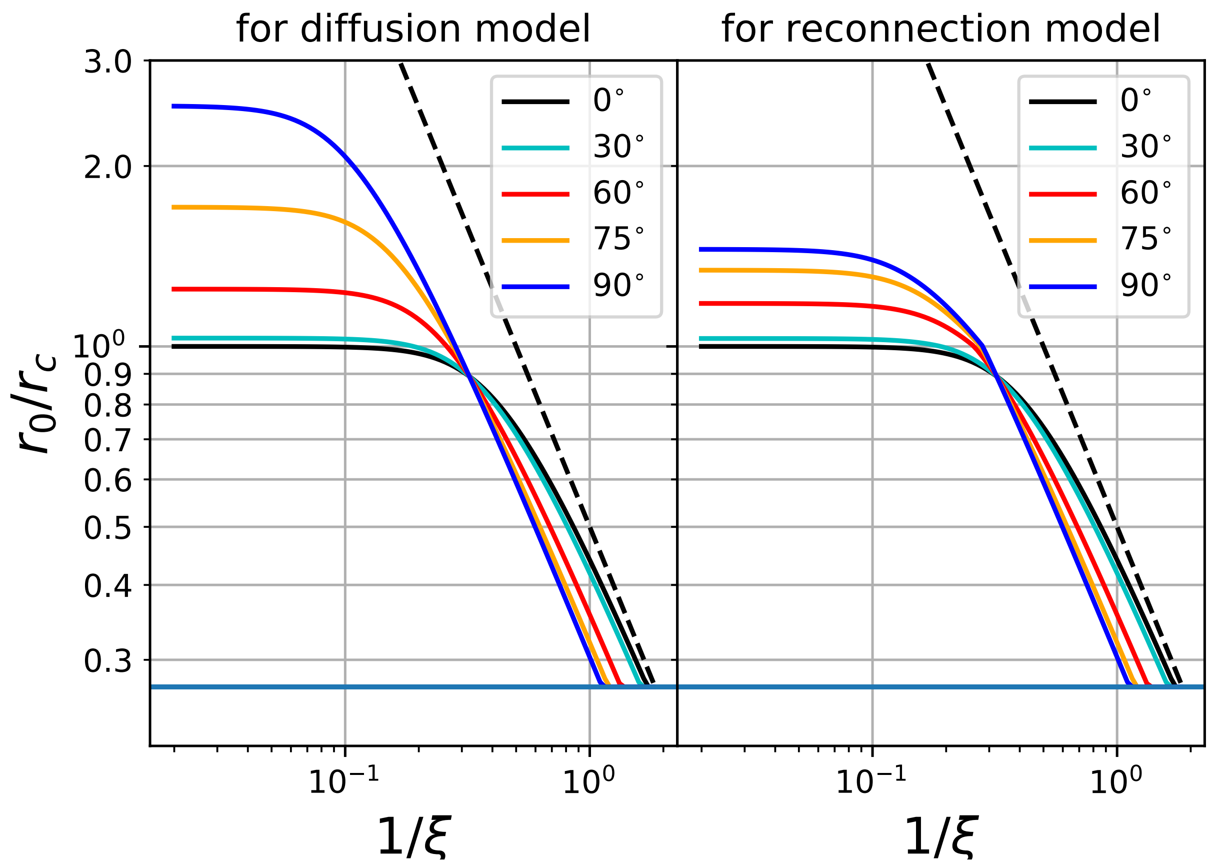



Рис. 2: Зависимость расстояния до края вязкого диска $r_0$ в единицах радиуса коротации от параметра $1/\xi$ / $\dot{M}^{2/7}{\mu_m}^{4/7}$ для модели диффузии поля (рисунок слева) и пересоединения (рисунок справа) для разных углов $\chi$. Горизонтальная линия соответствует $r = max(R_{\text{NS}}, R_{\text{ISCO}})$. Штриховой линией показана зависимость $r_0 = 0.5r_a$. Отношение $z_0/r_0$ принято равным 0.05

Конечно, если темп аккреции возрастет сильнее некоторого значения, внутренний радиус диска $r_0$ формально станет меньше $R_{\text{max}} = max(R_{\text{ISCO}}, R_{\text{NS}})$ — максимума из радиуса НЗ и радиуса последней устойчивой орбиты, тогда мы должны положить $r_0 = R_{\text{max}}$, и, возможно, изменить граничные условия для уравнений на краю диска. Вопрос о граничных условиях в случае, когда $r_0 = R_{\text{NS}}$, не исследуется в этой работе. При выборе параметров НЗ $R_{\text{NS}} = 10$ км, $M_{\text{NS}} = 1.4M$ оказывается, что $R_{\text{ISCO}} > R_{NS}$, и проблема граничных условий, которые надо поставить на поверхности звезды, не возникает.

## 6.3 Зависимость внутреннего радиуса диска от темпа аккреции и магнитного поля НЗ

Исследуем теперь поведение внутреннего радиуса вязкого диска как решение уравнения 6.51. Малые $\xi = r_a/r_c$ соответствуют либо слабому магнитному полю, либо сильному темпу аккреции. Большие $\xi$, наоборот, относятся к сильному магнитному полю или слабому темпу аккреции. Говоря короче, чем больше $\xi$, тем сильнее влияние магнитосферы НЗ на аккрецию.

Во время рентгеновской вспышки на несколько порядков возрастает темп аккреции при постоянном магнитном поле, поэтому система может перейти из асимптотики сильного поля в асимптотику слабого поля: $\xi$ формально стремится к 0.

В работе Revnivtsev et al. 2009 [28] была экспериментально измерена зависимость частоты обрезания в спектре мощности источника, которая ассоциируется с кеплеровской частотой на внутреннем радиусе $\Omega_k(r_0)$, от потока в рентгеновском диапазоне $L_x$, см. рисунок 3. Результаты приведены для светимостей приблизительно $L = 3\ 10^{33} \quad 3\ 10^{36}$ эрг/с или, эквивалентно, темпов аккреции $\dot{M} = 4 \quad 10^{13} \quad 4 \quad 10^{16}$ г/с при КПД аккреции $0.1$. Было показано, что зависимость $r_0$ / $\dot{M}^{\ 2/7}$, которая следует из выражения для альфвеновского радиуса, удовлетворительно согласуется с наблюдениями в этом диапазоне светимостей.

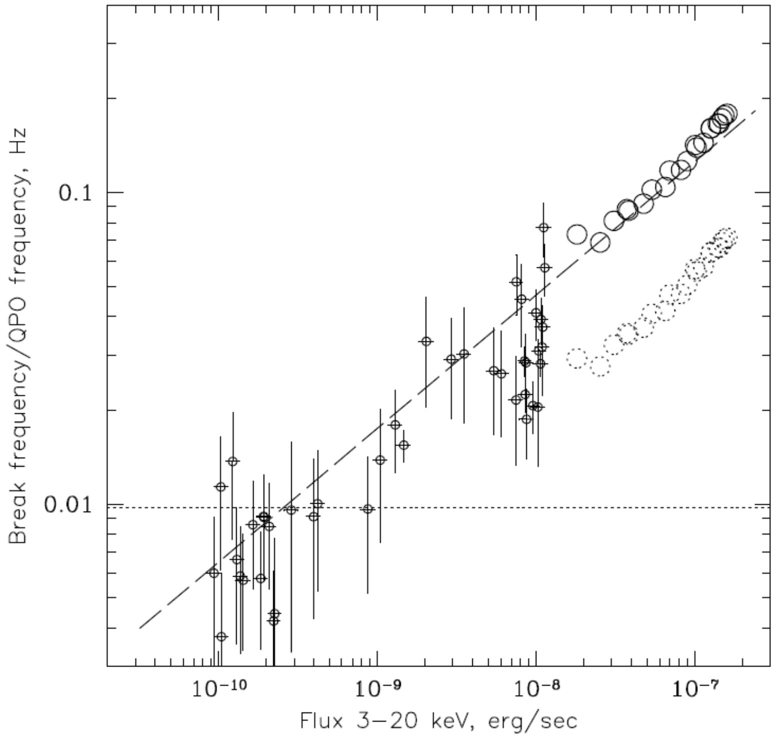



Рис. 3: Маленькими кружками — зависимость частоты обрезания в спектре мощности источника A0535+26 в диапазоне $3 \quad 20$ кэВ. Точечными большими кружками — частота квазипериодических осцилляций (КПО), которые наблюдались в работе Finger et al. 1996 [29]. Сплошными большими кружками — частота КПО, умноженная на 2.5. Штриховая линия — зависимость $\Omega_{\rm break}$ / $L^{3/7}$. Пунктирная линия — частота вращения НЗ. Из работы Revnivtsev et al. 2009 [28].

На рис. 4 показана зависимость $\Omega_k(\dot{M})$, следующая из наших моделей.

В случае сильной аккреции для случая модели диффузии (уравнение (6.51)) для $\omega(\xi)$ существует асимптотика (см. рисунки 2, 4). Найдем ее из условия, что левая часть уравнения (6.54) должна оставаться конечной при $\xi$ ! $0$. Тогда $\omega^{7/3}/\xi^{7/2}$ ! $const$, то есть $\omega$ / $\xi^{3/2}$. Отсюда следует, что $\omega$ / $\dot{M}^{\ 3/7}$ и $r_0$ / $\dot{M}^{\ 2/7}$, то есть такая же асимптотика, как для альфвеновского радиуса.

Такая асимптотика справедлива приблизительно для значений $\xi$ . $3$, что для $\mu_{26} = 1, f_{200} = 1$ соответствует $\dot{M} \quad 10^{14}$ г/с. Для $\log \mu_m = 30, f = 1$ Hz, это соответствует $\dot{M} \quad 10^{13}$ г/с.

Для системы A0535+26, изученной в статье Revnivtsev et al. 2009 [28], $f = 9.7 \quad 10^{\ 3}$ Hz, $B = 5.1 \quad 10^{12}$ Гс (Caballero et al. 2011 [30]), что соответствует $\mu_m \quad 5 \quad 10^{30}$ Гс см$^3$. Получаем для $\log \dot{M} = 13 \quad 16$: $\xi = 0.5 \quad 3.5$ для точек на рис. 3 в работе Revnivtsev et al. Действительно: нижние точки, для которых $\xi \quad 3$, по мнению автора настоящей работы не соответствуют зависимости, показанной в работе Revnivtsev et al. В то же время верхние точки, в которых $\xi < 3$, прекрасно ложатся на кривую $\Omega(r_0)$ / $\dot{M}^{3/7}$.

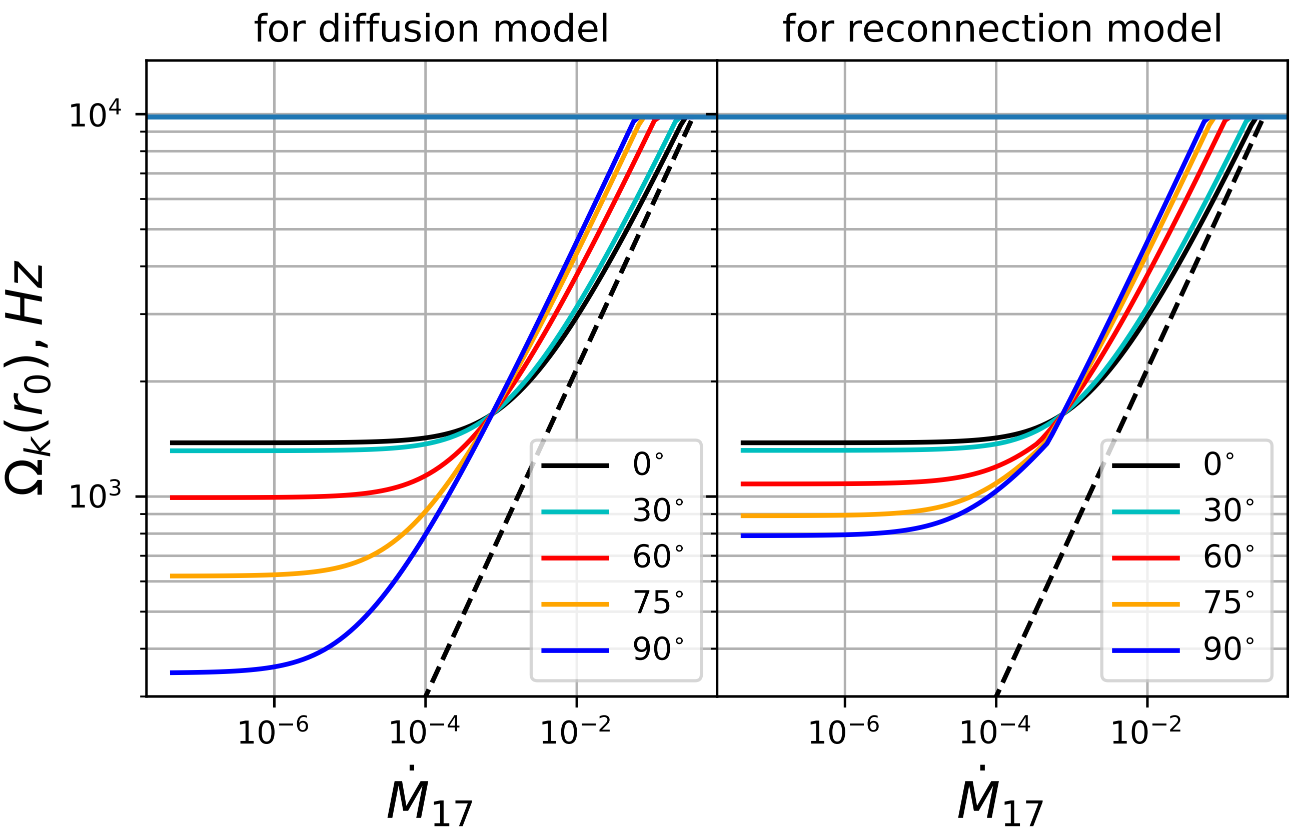



Рис. 4: Зависимость кеплеровской частоты на внутреннем радиусе диска $\Omega_k(r_0)$ от темпа аккреции $\dot{M}$ для модели диффузии поля (рисунок слева) и пересоединения (рисунок справа) для разных углов $\chi$. Горизонтальная линия соответствует $r = max(R_{\rm NS}, R_{\rm ISCO})$. Штриховая линия соответствует модели $r_0 = 0.5r_a$. Отношение $z_0/r_0$ принято равным 0.05. Частота вращения НЗ принята равной $f_{200} = 1$, магнитный момент $\mu_{26} = 1$.

Для параметризации I магнитного поля (уравнение (6.2)), проводя те же выкладки, получаем $\omega$ / $\xi^{21/20}$ / $\dot{M}^{\;3/10}$, то есть $r_0$ / $\dot{M}^{\;1/5}$. Напомним, что KR07 аргументируют, что такое наведенное поле не имеет физического основания на расстояниях меньших радиуса коротации $r_c$.

Если $\xi$ ! 1 , решение уравнения (6.51) стремится к $\omega_{crit}$. Для нулевого угла $\chi = 0$ $\omega_{crit} = 1$, то есть $r_0$ ! $r_c$ при $\xi$ ! 1 . Для ненулевого угла $\chi > 0$, и $\omega_{crit} > 1$, то есть $r_0$ может быть больше $r_c$ при ненулевом угле. В этом состоит существенное отличие выражения для внутреннего радиуса $r_0$, приводимого в настоящей статье, от часто используемого приближения $r_0/r_a$ const. Наш внутренний радиус "останавливается" примерно на коротационном радиусе $r$ $r_c$ даже при слабой аккреции, в то время как альфеновский радиус может стать на порядки больше радиуса коротации. Дело в том, что в нашем подходе внутренний радиус находится не из условия равенства газового и магнитного давлений, а из равенства потоков моменов импульса, переносимых вязкими и электромагнитными силами.

## 6.4 Решение для уравнения переноса углового момента

Теперь выведем выражения для тензора вязких напряжений $W_{r\phi}$.

Внутри диска $b_\phi = 0$, и уравнение (6.41) принимает вид:

$$\dot{M}\frac{d\Omega r^2}{dr} = 2\pi\frac{d}{dr}(r^2 W_{r\phi}) + \frac{z}{r}r^2 hB_r\frac{\partial}{\partial r}(rb_\phi)i_{2\pi} + r^2 hB_z b_\phi^{\text{upper}} i_{2\pi}. \tag{6.56}$$

Пусть $z_0 = z(r_0)$ — полутолщина диска на внутреннем краю вязкого диска и, как и раньше, $\delta_0 = z_0/r_0$ — относительная полутолщина диска на внутреннем радиусе. В рассматриваемых моделях выражение для вязкого тензора всегда можно записать в виде:

$$W_{r\phi} = \quad \frac{\dot{M}\Omega_k}{2\pi}\left(g_{SS}(r) + g_0(r)\cos^2\chi + g_1(r)\delta_0\sin^2\chi\right), \tag{6.57}$$

причем $g_0$ и $g_1$ есть функции только расстояния $r$ и не зависят ни от полутолщины $z$, ни от угла $\chi$. Функция $g_{SS}$ — стандартное выражение, полученное Шакурой и Сюняевым:

$$g_{SS}(r) = 1 \quad \sqrt{\frac{r_0}{r}} = f_1(r), \tag{6.58}$$

где введена функция $f_n$:

$$f_n(r) = 1 \quad \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n/2}. \tag{6.59}$$

Интегрируя уравнение (6.56) от $r_0$ до $r$ получаем для модели диффузии ($b_\phi^{\text{upper}} = b_\phi^{II}$ везде и $b_\phi^{\text{inside}} = 0$ всюду, кроме внутреннего края):

$$g_0(r)^{diff} = \frac{\epsilon\xi^{7/2}}{3}\sqrt{\frac{r_0}{r}}(2\omega f_3(r) \quad f_6(r))\omega^{\quad 7/3}, \tag{6.60}$$

$$g_1(r)^{diff} = 2\epsilon\xi^{7/2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}(\omega \quad 1)\omega^{\quad 7/3}. \tag{6.61}$$

Чтобы получить аналогичное выражение для модели пересоединения, нужно рассмотреть три случая взаимного расположения $r, r_c, r_0$:

- $r_0 < r_c$ и $r < r_c$, тогда $b_\phi = b_\phi^{II}$,
- $r_0 < r_c$ и $r > r_c$, тогда $b_\phi(r) = b_\phi^{II}(r), r_0 \quad r < r_c$ и $b_\phi(r) = b_\phi^{I}(r), r \quad r_c$,
- $r_0 > r_c$ и $r > r_c$, тогда $b_\phi = b_\phi^{I}$.

Действуя аналогично выводу выражений (6.60) и (6.61), получим похожие, но гораздо более громоздкие выражения для модели пересоединения:

$$g_0(r)^{rec} = \frac{\epsilon\xi^{7/2}}{3}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\omega^{\quad 7/3}\begin{cases} 2\omega f_3(r) \quad f_6(r) & r_0 < r_c \text{ и } r < r_c, \\ (1 \quad \omega)^2 + \left(\omega^2 \quad \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right) \\ \frac{2}{3}\omega^2\left(1 \quad \frac{1}{\omega^3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{9/2}\right) & r_0 < r_c \text{ и } r > r_c, \\ f_6(r) \quad \frac{2}{3\omega}f_9(r) & r_0 > r_c \text{ и } r > r_c, \end{cases} \tag{6.62}$$

$$g_1(r)^{rec} = \begin{cases} g_1(r)^{\text{di}} & r_0 < r_c, \\ g_1(r)^{\text{di}} \;\; /\omega & r_0 > r_c. \end{cases} \tag{6.63}$$

Член, входящий в выражения с коэффициентом $\delta_0 \quad 1$, важен только при углах, близких к $90$ , поскольку основной магнитный вклад пропорционален $\cos^2\chi$, а поправка пропорциональна $\sin^2\chi$. Поэтому основной вклад исчезает при $\chi = 90$ , а поправка, напротив, достигает максимума.

Выражения для вязкого тензора для таких моделей наведенного поля, как модели диффузии и пересоединения, выведены впервые в настоящей работе. И в модели диффузии, и в модели пересоединения выражения сводятся к обычному тензору напряжений для стандартного диска в случаях $\mu_m = 0$, что неудивительно. В случае $\chi = 90$ магнитные слагаемые входят с коэффициентом $\delta_0 = z(r_0)/r_0$. Объяснение этому следующее. Представим некоторую точку в диске, назовем ее точкой $A$, и пусть точка $A^0$ — точка, симметричная $A$ относительно центра. Когда ось магнитного диполя лежит в плоскости диска, поле в точке $A$ направлено противоположно полю в $A^0$. Поскольку уравнения усредняются по периоду вращения НЗ, вклад магнитного поля почти замывается, и магнитные напряжения возникают только из-за конечной толщины диска.

В следующих разделах будет удобно пользоваться безразмерной функцией $g(r)$, которую определим как:

$$g(r) = g_{SS}(r) + g_0(r)\cos^2\chi + g_1(r)\delta_0\sin^2\chi. \qquad (6.64)$$

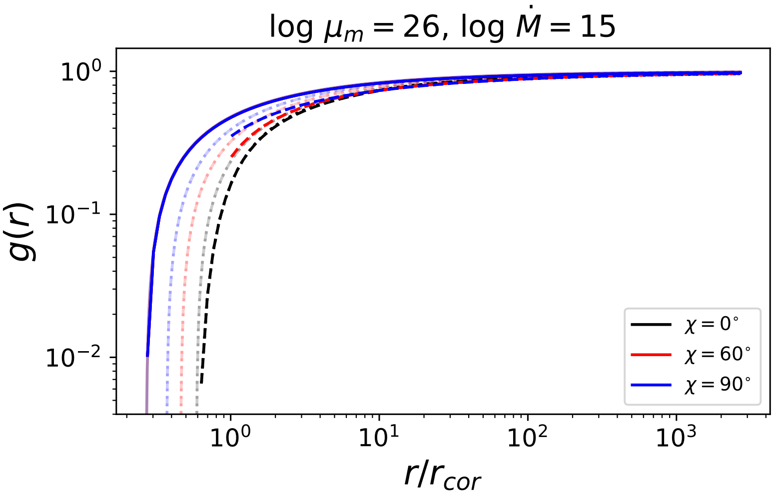
На рисунке 5 показаны функции $g(r)$ для моделей диффузии (штиховой линией) и пересоединения (пунктиром) для наборов параметров $\log\mu_m = 26, \log\dot{M} = 15$ (параметр $\xi = 0.1 \quad 1$) и $\log\mu_m = 26, \log\dot{M} = 13$ (параметр $\xi = 0.4$). Бледным для сравнения показана квази-стандартная зависимость $g_{SS}(r) = 1 \quad \sqrt{r_0/r}$. Во-первых, модели диффузии и пересоединения неотличны друг от друга (максимальное различие — 2 %). В диапазоне $r$ 2 $[r_0, r_c]$ модели диффузии и пересоединения совпадают, а при $r > r_c$ отличие между моделями оказывается мало́. Во-вторых, сами по себе функции $g(r)$ очень близки к $g_{SS}(r)$ на панели 5(a), что связано с малостью магнитной “добавки” в вязкий тензор для выбранных параметров. То есть диск — квази-стандартный с внутренним радиусом $r_0$. Если уменьшить темп аккреции еще в сто раз, то параметр $\xi = 0.4$, и диск отличается от квази-стандартного, потому что магнитные члены в $W_{r\phi}$ становятся значимыми.

Интересно следующее свойство полученных тензоров вязких напряжений $W_{r\phi}$ (рассуждения проведем для угла $\chi$, не слишком близкого к $90$ , чтобы членом с $g_1(r)$ можно пренебречь). При не слишком больших магнитных полях параметр быстроты $\omega$, фигурирующий в выражениях, мал по сравнению с единицей, то есть внутренний радиус $r_0$ много меньше радиуса коротации $r_c$. Магнитный член вычитается из стандартного. Энерговыделение в диске падает, но чем больше угол, тем меньше вычитаемое, ведь магнитное слагаемое пропорционально $\cos^2\chi$, убывающей функции угла. Иными словами, при малых полях вязкое энерговыделение в диске растет с углом. При больших же полях параметр быстроты $\omega$ выходит на значение порядка 1, причем выражение $2\omega f_3 \quad f_6$ положительно, то есть магнитный член добавляется к стандартному слагаемому, то есть энергии в таком диске выделяется больше чем в стандартном. То есть теперь при увеличении угла энерговыделение будет уменьшаться. Такое поведение лучше всего иллюстрируют рассчитанные спектры диска (см. рисунки 6, 7): на всех панелях 6 энерговыделение убывает при росте угла (мы специально подбирали такие спектры, в которых магнитное поле сильно влияет на энерговыделение), а на 7(d) — растет при росте угла.

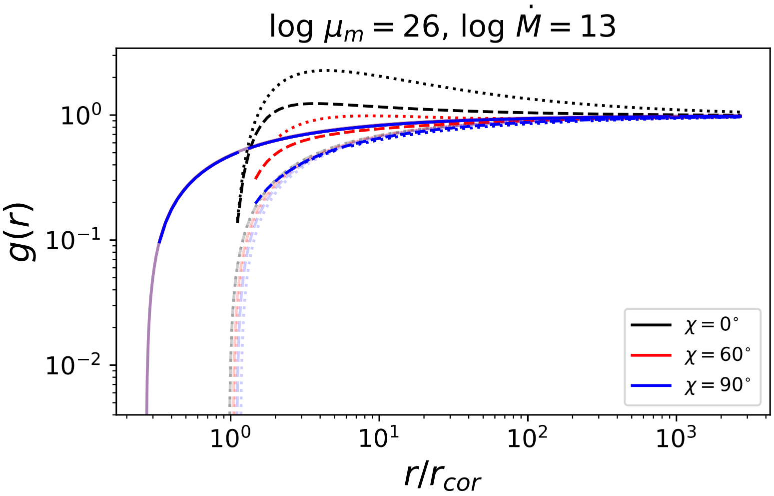
При угле $\chi \quad 90$ вся зависимость от магнитного поля в вязком тензоре $W_{r\phi}$ заключена в функции $g_1(r)$. Автор поначалу полагал, что этим членом можно пренебречь в силу малости коэффициента $z_0/r_0$, однако оказалось, что такое пренебрежение существенно искажает результаты для случая, когда ось магнитного диполя лежит почти в плоскости диска. Краткое сравнение результатов моделирования структуры со включенным членом $g_1$ и без него дается в приложении А.

## 6.5 Асимптотическое поведение вязкого тензора

Исследуем асимптотику для $g(r)$ для случая сильного магнитного поля (или низких темпов аккреции) в модели диффузии. Если $\xi$ ! 1 , то, как было отмечено ранее, $\omega$ ! $\omega_{crit}$. Тогда получаем, что для сильного магнитного поля (если, конечно, $\chi \neq 90$ , и можно пренебречь еще




(a)




(b)

Рис. 5: Безразмерная функция $g(r)$ для некоторых углов $\chi$ для модели диффузии (штриховая линия), пересоединения (пунктирная линия, неразличимо за штриховой линией на панели 5(a)) и стандартной модели аккреции (сплошной линией), когда внутренний радиус $r_0$ совпадает с радиусом последней устойчивой орбиты $R_{\rm ISCO}$. Сверху рисунок для параметров $\log \mu_m = 26, \log \dot M = 15$, параметр $\xi = 0.1$, снизу — параметры те же, но темп аккреции в 100 раз меньше и $\xi = 0.4$. Бледным цветом для соответствующих моделей и углов показана зависимость $g_{SS}(r) = 1 \quad \sqrt{r_0/r}$.

и членом $g_1(r)$):

$$g(r) = \frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\omega_{crit}^{\ 7/3}\xi^{7/2}(2\omega_{crit}f_3(r) \quad f_6(r))\cos\chi^2, \tag{6.65}$$

где $r_0 = r_c \quad \omega_{crit}^{2/3}$. Имея в виду, что

$$\xi^{7/2} = \left(\frac{r_a}{r_c}\right)^{7/2} = \frac{\mu_m^2}{\dot M \sqrt{GM}}\left(\frac{1}{r_c}\right)^{7/2}, \tag{6.66}$$

получаем выражение для тензора вязких напряжений:

$$W_{r\phi} = -\frac{\epsilon}{6\pi}\frac{\mu_m^2}{r_c^5}\frac{\sqrt{r_0 r_c^3}}{r^2}\omega_{crit}^{7/3}(2\omega_{crit}f_3(r) - f_6(r))\cos^2\chi. \quad (6.67)$$

Можно переписать это выражение в более приятной глазу форме:

$$W_{r\phi} = W_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \quad (6.68)$$

где

$$W_0 = -\frac{\epsilon}{6\pi}\frac{\mu^2}{r_0^5}(2\omega_{crit}f_3(r) - f_6(r))\cos^2\chi. \quad (6.69)$$

Это выражение применимо при не слишком больших углах. Если не пренебрегать $g_1(r)$, то можно получить громоздкое выражение, применимое при любых углах, но от этого не изменятся следующие рассуждения.

Этот анзац можно попробовать интерпретировать как выражение для мертвых дисков (дисков-резервуаров), то есть для таких, в которых аккреция на центральный объект остановлена чем-то, например, сильным магнитным полем (Sunyaev & Shakura 1977 [31]). При этом диск, разумеется, может существовать, излучать и вообще вести себя как нормальный аккреционный диск, просто вне рамок стандартной модели дисковой аккреции. В процитированной работе авторы построили модель мертвого диска, получив похожее на ур. (6.68) выражение. Существенное отличие в том, что в работе Сюняева и Шакуры $W_0$ имеет смысл напряжений, действующих на внутренний край диска и удерживающих его от, собственно, аккреции. В нашей же работе $W_0$ сам по себе зависит от расстояния, и, более того, равен 0 на $r = r_0$, поэтому аналогия с мертвыми дисками не вполне точна. Несмотря на это, в асимптотике $r \to \infty$ зависимость $W_0$ от расстояния быстро пропадает, и $W_0$ действительно становится константой.

Оставляя только главные члены при $r \to \infty$, получаем асимптотику:

$$g(r) \to \begin{cases} \frac{\epsilon}{3}\omega_{crit}^{7/3}(2\omega_{crit} - 1)\xi^{7/2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\cos\chi^2, & \cos^2\chi \quad 1, \\ 2\epsilon\sqrt{\frac{r_0}{r}}\xi^{7/2}(\omega_{crit} - 1)\delta_0\sin^2\chi, & \cos^2\chi \quad 1. \end{cases} \quad (6.70)$$

Разумеется, поскольку эта асимптотика имеет зависимость $1/\sqrt{r}$, рано или поздно магнитный член становится меньше обычного слагаемого из стандартной модели при все большем увеличении растояния. Однако, поскольку основное энерговыделение в диске происходит вблизи $r_0$, действительно имеет смысл рассматривать асимптотики для сильного поля (6.65) и (6.70).

# 7 Спектр диска

Рассчитаем спектр теплового излучения диска. С одной стороны, мы, конечно, еще не провели самосогласованный расчет радиальной структуры диска и не знаем $\delta_0 = z_0/r_0$. С другой стороны, последующие разделы покажут, что $\delta_0 = 0.02$ (стандартный диск) и $\delta_0 = 0.06$ (замагниченный диск) — это хорошие приближения, и ими мы будем пользоваться в этом разделе.

Можно вычислить поток энергии за счет вязкого энерговыделения с поверхности диска:

$$Q_0 = \frac{1}{2} W_{r\phi} r \frac{d\Omega_k}{dr} = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{r^3} g(r), \tag{7.71}$$

и эффективную температуру поверхности, используя закон Стефана-Больцмана с константой $\sigma_b$:

$$T_{eff} = (Q_0/\sigma_b)^{1/4}. \tag{7.72}$$

Для расчета спектра воспользуемся стандартным методом: разобьем диск на кольца шириной $dr$ и длиной окружности $2\pi r$. Предположим, что с единицы площади излучается спектральная плотность энергии $I_\nu$, а затем проинтегрируем по всему диску. Пусть $d$ — расстояние до диска, $\cos i$ — косинус угла наклона оси диска к лучу зрения.

$$\frac{F(\nu) d^2}{\cos i} = 2\pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} I_\nu r dr. \tag{7.73}$$

В изотермичной атмосфере, если не учитывать рассеяние, формируется планковский спектр:

$$I_\nu = B_\nu^{\mathrm{Planc}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{7.74}$$

Преобразуем слегка выражение для $Q_0$:

$$Q_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{r^3} g(r) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{r_0^3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 g(r). \tag{7.75}$$

Введем обозначения: эффективная температура поверхности диска на краю $r = r_0$:

$$T_0 = \left(\frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{r_0^3 \sigma_b}\right)^{1/4}, \tag{7.76}$$

безразмерная частота:

$$\nu_0 = \frac{h\nu}{kT_0}. \tag{7.77}$$

С безразмерной переменной

$$x = \nu_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/4} \tag{7.78}$$

можно переписать уравнение (7.73):

$$\frac{F(\nu_0) d^2}{\cos i} = \frac{16\pi}{3} \frac{(k_b T_0)^3 r_0^2}{h^2 c^2} \nu_0^{1/3} \int_{\nu_0}^{\nu_0 (r_{out}/r_0)^{3/4}} \frac{x^{5/3} dx}{\exp\left(x g^{-1/4}(r_0 (x/\nu_0)^{4/3})\right) - 1}, \tag{7.79}$$

где $r_{out}$ — внешний радиус диска. В случае слабого магнитного поля функция $g(r) \approx 1$ при $x \gg \nu_0$. В случае сильного магнитного поля или слабой аккреции ($\xi \ll 1$) $g(r) \propto 1/\sqrt{r}$. Заметим, что тогда $W_{r\phi} \propto 1/r^{7/2}$ вместо обычного выражения $W_{r\phi} \propto 1/r^3$.

Интересно исследовать промежуточные асимптотики спектра диска, когда $\nu_0 \quad 1$ и $\nu_0(r_{out}/r_0)^{3/4} \quad 1$. Тогда нижний и верхний пределы интеграла в уравнении (7.79) можно заменить на $0$ и *1* и

$$F(\nu) \ / \ \nu^{1/3} \int_0^{1} \frac{x^{5/3}dx}{\exp\left(xg \quad ^{1/4}(r_0(x/\nu_0)^{4/3})\right) \quad 1}. \tag{7.80}$$

Если поле слабо, $g(r)$ не зависит от $r$, и мы получаем известный результат для спектра Стандартного диска:

$$F(\nu) \ / \ \nu^{1/3}.$$

В случае сильного поля $g \quad ^{1/4}(r) \ / \ r^{1/8} \ / \ x^{1/6}\nu_0 \quad ^{1/6}$. С подстановкой $t = x^{7/6}\nu_0 \quad ^{1/6}$ интеграл в (7.80) дает:

$$F(\nu) \quad \nu^{5/7}. \tag{7.81}$$

Такое же выражение может быть получено для “мертвых дисков”, см. Sunyaev & Shakura 1977 [31]. Есть надежда, что в каком-то смысле это означает, что наша модель взаимодействия поля с диском может быть применена и, например, к стадии “пропеллера” (в смысле к стадии, когда аккреция на центральный объект почти остановилась). Такая асимптотика наблюдалась для квазаров (Weaver&Horne 2022 [32]), которые, конечно, не имеют отношения к замагниченным звездам. Задача проверки таких асимптотик осложняется тем, что спектр, который мы моделируем в этой работе, излишне идиализирован, и не наблюдается сам по себе. Должны быть учтены эффекты комптонизации излучения, рассеяния в фотосфере диска, самооблучения диска своими внутренними частями и нейтронной звездой. Это очень сложная задача, которая выходит за рамки этой работы. Кроме того, экспериментально определяется, разумеется, суммарный спектр диска, НЗ и звезды-компаньона, а не просто спектр диска.

На рисунке 6 показано, как спектр диска в разных моделях зависит от величины магнитного поля при фиксированном темпе аккреции. Для простоты вычислений относительная полутолщина $\delta_0$ полагалась равной 0.02 для стандартного диска и 0.06 для моделей с магнитным полем (результаты слабо зависят от выбранного $\delta_0$). При сравнительно маленьких полях светимость уменьшается (см. раздел 6), кривые для моделей с магнитным полем лежат ниже кривых стандартного диска. При увеличении поля магнитный член начинает доминировать над аккреционным, и почти все энерговыделение происходит за счет разогрева диска магнитным полем. Важно, что мы не учитываем джоулево тепло, а считаем, что поля влияют на диск только тем, что взаимодействие с магнитосферой приводит к изменению вязкого нагрева. При больших полях, как уже было указано, диск в каком-то смысле превращается в мертвый. Например, промежуточная асимптотика превращается из $\nu^{1/3}$ в $\nu^{5/7}$, как было указано выше.

Рассмотрим, как спектр диска меняется во время рентгеновской вспышки аккрецирующего милисекундного пульсара. Взяв характерное значение магнитного поля, проварьируем темп аккреции. Возьмем поле $\mu_m = 10^{26}$ Гс см$^3$, характерное для аккрецирующих милисекундных пульсаров, и частоту вращения $f = 600$ Герц одного из самых быстрых аккрецирующих пульсаров IGR J00291+5934 (Galloway et al. 2005 [33], Di Salvo & Sanna 2020 [34]).

На рисунке 7 показан спектр диска при разных темпах аккреции. Если $\dot{M}$ велико, аккреционный диск “продавливает” магнитсферу НЗ: внутренний радиус вязкого диска значительно меньше радиуса коротации. Спектр слабо отличается от стандартного. При малых же темпах аккреции относительное влияние магнитосферы на $W_{r\phi}$ возрастает. Мы предполагаем, что для таких аккреционных дисков на поздних этапах рентгеновской вспышки, возможно, может быть экспериментально обнаружено отличие спектра от стандартного.

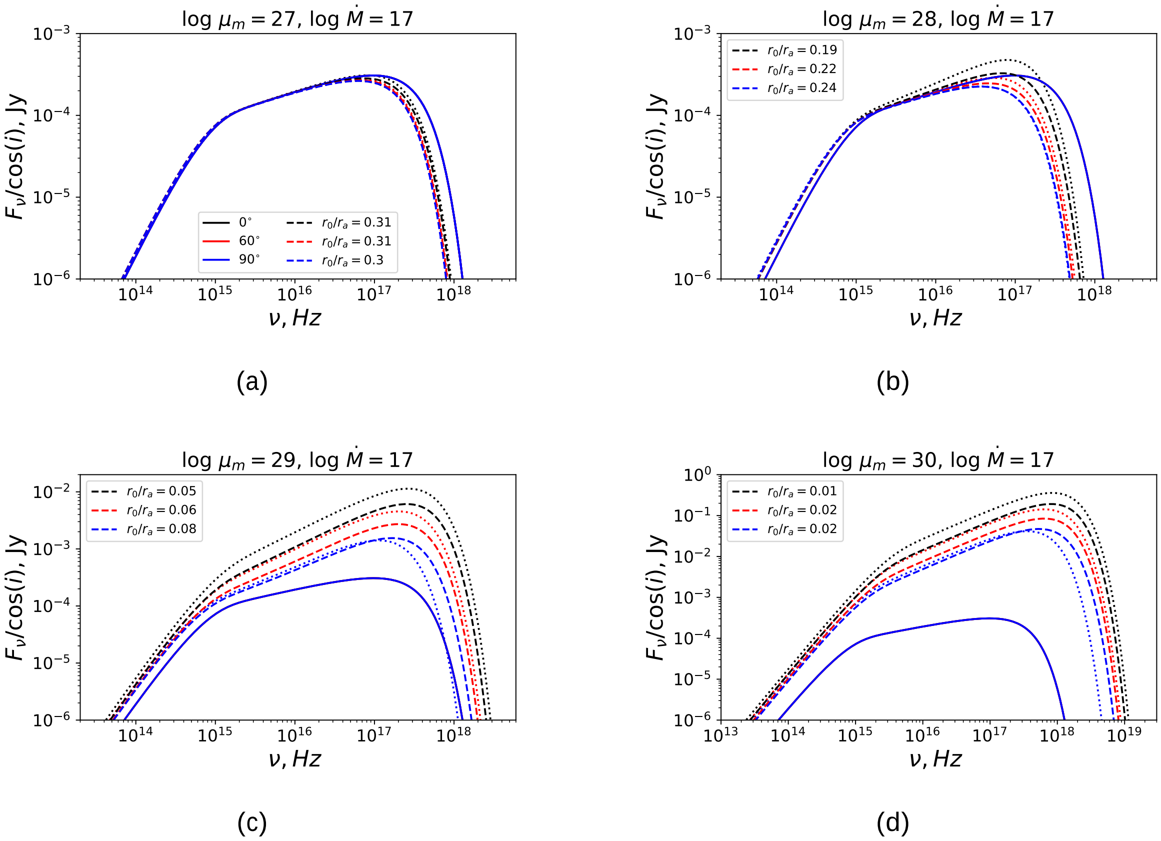
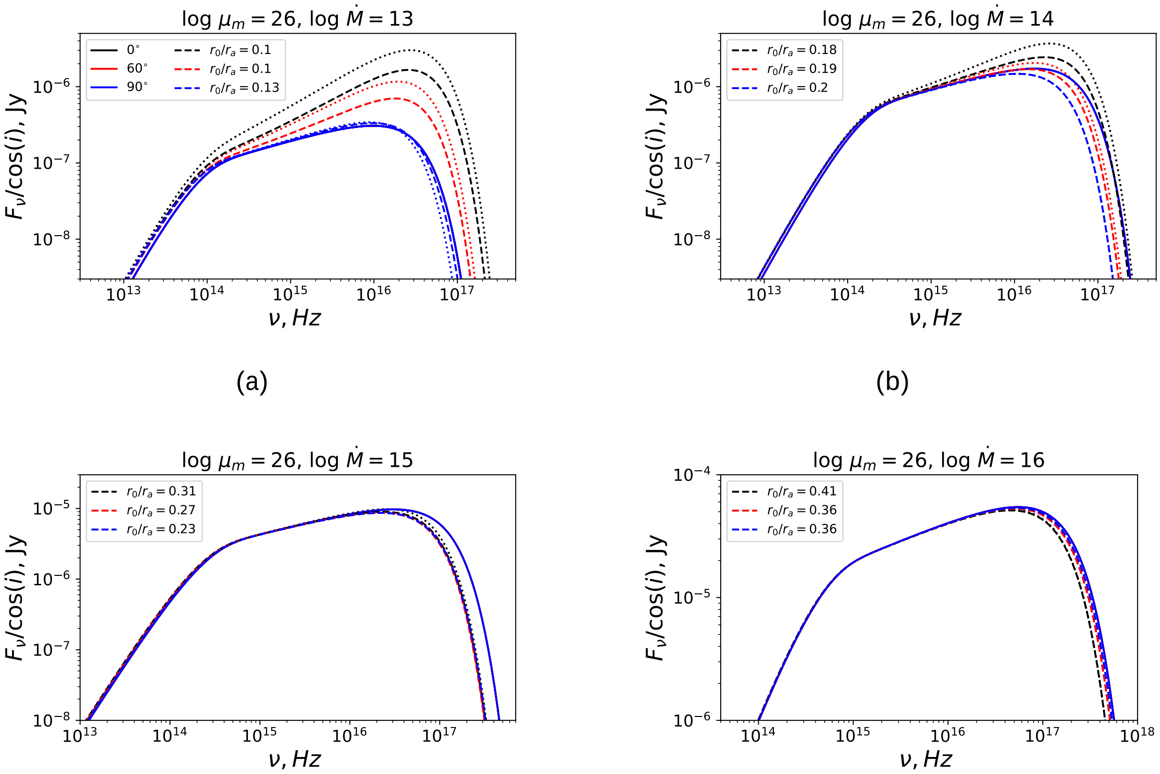



Рис. 6: Изменение в спектре замагниченного диска, вычисленное из уравнения (7.79). Расстояние до источника принято равным $d = 10$ кпк. Сплошная линия — результат для стандартной модели, пунктирная линия — для модели диффузии, прерывистая — для модели пересоединения. Для простоты вычислений $\delta_0 = z_0/r_0$ предполагалось постоянным в диске и равным 0.02(0.06) в случае Стандартного диска (моделей диффузии и пересоединения.) В легенде также указано отношение внутреннего радиуса к альфвеновскому радиусу для модели пересоединения. Темп аккреции принят $\dot{M} = 10^{17}$ г/с, $\alpha = 0.1$, $f_{200} = 1$.

Ответим на вопрос, может ли быть такое, что спектр во время всей рентгеновской вспышки доминирован магнитным полем. Для этого возьмем темп аккреции, характерный для пика вспышки, и промоделируем спектры для нескольких разных магнитных полей, см. рисунок 6. Оказывается, чтобы спектр был “магнитным” около пика вспышки, нам нужно поле $\log \mu_m = 29$ и больше, что нереалистично для таких объектов (см. обсуждение в разделе 9).




(a) (b) (c) (d)

Рис. 7: Вариации спектра диска с изменением темпа аккреции. Расстояние до источника принято равным $d = 10$ кпк. Сплошная линия — результат для стандартной модели, пунктирная линия — для модели диффузии поля, прерывистая — для модели пересоединения линий в короне. Для простоты вычислений $\delta_0 = z_0/r_0$ предполагалось постоянным в диске и равным 0.02. На рис. 7(a) темп аккреции $\dot{M} = 10^{13}$ г/ с, на рис. 7(b), 7(c), 7(d) темп аккреции больше в 10, 100, 1000 раз соответственно. В легенде также указано отношение внутреннего радиуса к альфвеновскому радиусу для модели пересоединения. Магнитный момент принят $\mu_m = 10^{26}$ Гс см$^3$, $\alpha = 0.1$, $f = 600$ Герц.

# 8 Вертикальная структура

В этом разделе нам часто придется различать $z$ — вертикальную координату и $z$ — полутолщину диска (в предыдущих разделах из контекста всегда было ясно, что имеется в виду). Будем далее придерживаться таких обозначений: $z$ — это координата по оси, перпендикулярной экваториальной плоскости диска. $Z_0$ — полутолщина диска на внутреннем радиусе. $z_0(r)$ — это полутолщина диска на расстоянии $r$ от геометрического центра диска.

## 8.1 Основные уравнения вертикальной структуры

Вычислив тензор вязких напряжений $W_{r\phi}$ для диска (иными словами — выделение тепла в диска на каждом радиусе), можно рассчитать вертикальную структуру аккреционного диска. Мы используем подход, схожий с подходом $\Pi$-параметров, разработанный в работе Ketsaris & Shakura 1998 [35]. В этом случае легко рассчитать и радиальную структуру в случае аналитической зависимости непрозрачности от плотности и температуры (Suleimanov et al. 2007 [36]).

Подход Ketsaris & Shakura был модифицирован, дабы решать не задачу на собственные значения, а краевую задачу 1 рода. Такая краевая задача решается методом стрельбы.

Прежде всего, рассмотрим последнее уравнение в (3.11). С уже принятыми упрощениями (см. раздел 6 и обсуждение упрощений там) оно становится:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) = \quad \rho\Omega_k^2 z + \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)B_z. \tag{8.82}$$

Это уравнение вертикального магнитогидроравновесия. По доброй традиции разделов 5 и 6 распишем производную по направлению:

$$(\vec{B}\,\mathbf{r}\,)B_z = B_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{B_\phi}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial z} = \quad 3B_r\frac{B_z}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_z^2}{2}\right). \tag{8.83}$$

Усредним теперь третье уравнение в (3.11) по азимутальному углу. Далее скобками hi мы будем обозначать такое усреднение. С учетом (8.83) и отбросив $B_rB_z$, которое занулится при усреднении по $\phi$, получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \quad \rho\Omega_k^2 z \quad \frac{\partial}{\partial z}\left\langle\frac{B^2 \quad B_z^2}{8\pi}\right\rangle = \quad \rho\Omega_k^2 z \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{5}{16\pi}\frac{\eta_{\mathrm{GL}}^2\mu_m^2}{r^6}\sin^2\chi + \frac{h b_\phi^2 i}{8\pi}\right). \tag{8.84}$$

Напоминаем, что в обеих принятых моделях $hb_\phi^2 i = 0$ внутри диска[2].

Введем поток излучения по вертикальной координате $Q$. Если пренебречь всеми видами теплопереноса, кроме излучения, то уравнение переноса энергии по вертикали таково:

$$Q = \quad \frac{c}{3\kappa_R\rho}\frac{d\epsilon_{rad}}{dz}. \tag{8.85}$$

Здесь $\kappa_R$ это росселандов коэффициент непрозрачности. Мы рассмотрели случай аналитической непрозрачности:

$$\kappa_R = \kappa_0\frac{\rho^\iota}{T^\gamma}. \tag{8.86}$$

[2] Даже если $b_\phi^{\mathrm{inside}} = 0$, это не снимает вопроса, какова производная $\partial_z b_\phi$. Эта производная может быть значительна вблизи поверхности диска, то есть наведенное поле может влиять на уравнения вблизи $z = z_0$ и на граничные условия для давления. Особенно важно это при малых углах $\chi$. Это важный вопрос, но в силу его сложности (и, судя по всему, неоднозначности разрешения, ведь можно по-разному аппроксимировать $b_\phi^{\mathrm{inside}}$!) он не рассматривается в данной работе. Мы будем просто предполагать, что $b_\phi^{\mathrm{inside}} = 0$ и $\partial_z b_\phi^{\mathrm{inside}} = 0$

Если непрозрачность определяется рассеянием на свободных электронах, то $\kappa_R = \sigma_t$ — томпсоновская непрозрачность, то есть $\iota = \gamma = 0, \kappa_0 = \sigma_t = 0.335$ см$^2$/г для солнечного химсостава. Если же непрозрачность определяется, в основном, тормозным излучением электронов, то $\iota = 1, \gamma = 7/2, \kappa_0 = 5 \quad 10^{24}$ см$^5$ $K^{7/2}$ г $^{\ 2}$ — крамерсовская непрозрачность (см., например, Lipunova et al. 2018 [27]).

Введены обозначения: $\epsilon_{rad}$ — это плотность энергии излучения:

$$\epsilon_{rad} = aT^4, \tag{8.87}$$

где $a = 4\sigma_b/c$.

$\Sigma(z)$ — это массовая координата:

$$\Sigma = \int_0^z \rho(h)dh. \tag{8.88}$$

Причем $2\Sigma(z_0(r))$ — это поверхностная плотность диска на расстоянии $r$ от центра диска. Система уравнений для вертикальной структуры имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz} = \quad z(\Omega_k^2 \quad \frac{15}{8\pi}\eta_{GL}^2\frac{\mu_m^2}{\rho r^8}\sin^2\chi) & \text{Уравнение Навье-Стокса по } z\text{-координате,} \\ \frac{d\Sigma}{dz} = \quad \rho & \Sigma \text{ по определению,} \\ \frac{c}{3\kappa_R\rho}\frac{d(aT^4)}{dz} = \quad Q & \text{радиационный перенос энергии,} \\ \frac{dQ}{dz} = \quad w_{r\phi}r\frac{d\Omega_k}{dr} = \frac{3}{2}\Omega_k\alpha P & \text{энерговыделение.} \end{cases} \tag{8.89}$$

Нормируем величины на какие-нибудь значения, которые определим далее:

$$P = p \quad P_0, T = \theta \quad T_0, \Sigma = \sigma \quad \Sigma_0/2, Q = q \quad Q_0, \tag{8.90}$$

где $Q_0$ — поток излучения с поверхности диска — известен:

$$Q_0 = \frac{3}{8\pi}\frac{GM\dot{M}}{r^3}g(r). \tag{8.91}$$

Нам удобно интегрировать уравнения с поверхности к экватору, так что параметризуем вертикальную координату следующим образом:

$$z = z_0(1 \quad \zeta), \tag{8.92}$$

причем $\zeta = 1$ отвечает экваториальной плоскости диска, $\zeta = 0$ это поверхность диска. Предполагается, что радиационное давление незначительно по сравнению с газовым давлением. Это может быть не так во внутренних частях диска. Тем не менее, с этим предположением:

$$P = P_{\text{gas}} = \frac{<}{\mu}\rho T, \tag{8.93}$$

$$\rho = \frac{P_0\mu}{<T_0}\frac{p}{\theta}, \tag{8.94}$$

И со введенными обозначениями система (8.89) становится:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp}{d\zeta} = \dfrac{\Omega_k^2 z_0^2 \mu}{<T_0} \dfrac{p}{\theta}(1 \quad \zeta) \quad \dfrac{15}{8\pi}\eta_{GL}^2 \dfrac{\mu_m^2 z_0^2}{P_0 r^8}(1 \quad \zeta)\sin^2\chi, \\
\dfrac{d\sigma}{d\zeta} = \dfrac{2P_0\mu z_0}{<T_0\Sigma_0}\dfrac{p}{\theta}, \\
\dfrac{d\theta}{d\zeta} = \dfrac{3}{4}\dfrac{Q_0\kappa_0 P_0^{\iota+1}\mu^{\iota+1}z_0}{ac<^{\iota+1}T_0^{\iota+\gamma+5}} q \dfrac{p^{\iota+1}}{\theta^{\iota+\gamma+4}}, \\
\dfrac{dq}{d\zeta} = \quad \dfrac{3}{2}\dfrac{\Omega_k \alpha P_0 z_0}{Q_0} p.
\end{cases}
\qquad (8.95)
$$

Чтобы в уравнениях осталось поменьше коэффициентов, выберем:

$$
P_0 = \frac{2Q_0}{3\alpha\Omega_k z_0}, \qquad (8.96)
$$

$$
T_0 = \frac{\Omega_k^2 z_0^2 \mu}{<}, \qquad (8.97)
$$

$$
\Sigma_0 = \frac{2P_0\mu z_0}{<T_0}. \qquad (8.98)
$$

Тогда финальная система уравнений вертикальной структуры для безразмерных переменных $p, \sigma, \theta, q$ такова:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp}{d\zeta} = \left(\dfrac{p}{\theta} \quad M\right)(1 \quad \zeta), \\
\dfrac{d\sigma}{d\zeta} = \dfrac{p}{\theta}, \\
\dfrac{d\theta}{d\zeta} = K\dfrac{qp^{\iota+1}}{\theta^{\iota+\gamma+4}}, \\
\dfrac{dq}{d\zeta} = \quad p,
\end{cases}
\qquad (8.99)
$$

где

$$
K = \frac{3}{4}\frac{Q_0\kappa_0 P_0^{\iota+1}\mu^{\iota+1}z_0}{ac<^{\iota+1}T_0^{\iota+\gamma+5}}, \qquad (8.100)
$$

$$
M = \frac{15}{4\pi}\pi\alpha\eta_{\mathrm{GL}}^2 \left(\frac{z_0}{r}\right)^3 \left(\frac{r_a}{r}\right)^{7/2} \frac{1}{g(r)}\sin^2\chi. \qquad (8.101)
$$

Для заданного $r$ и коэффициент $K$, и коэффициент $M$ зависят только от высоты диска $z_0$. Если указаны 4 начальных условия на поверхности и 1 граничное условие в плоскости симметрии диска, задача для определения 4 безразмерных функций и высоты диска $z_0$ поставлена. Заметим, что при нулевом угле $\chi = 0$ эта система уравнений переходит в уравнения для стандартного диска, и магнитное поле влияет на структуру только через тензор вязких напряжений $W_{r\phi}$.

## 8.2 Начальные и граничные условия

Поскольку мы будем проводить интегрирование уравнений от $\zeta = 0$ к $\zeta = 1$, что соответствует интегрированию от поверхности диска к его экваториальной плоскости, договоримся называть "начальными" условия на поверхности диска (поскольку они будут начальными для системы уравнений (8.99)), а граничными — условия в плоскости диска.

Будем отсчитывать оптическую толщу $\tau$ снаружи внутрь диска:

$$
\tau(z) = \quad \int_1^z \kappa_R \rho dz. \qquad (8.102)
$$

Для совместного учета эффектов рассеяния и поглощения вводится эффективная оптическая толща. В приближении серой фотосферы эффективная оптическая толща набирается как (Zel'dovich & Shakura 1969 [37]):

$$\tau_{eff}(z) = \quad \int_{1}^{z} \sqrt{\kappa_{abs}(\kappa_{sc} + \kappa_{abs})}\rho dz, \tag{8.103}$$

где $\kappa_{abs}, \kappa_{sc}$ — непрозрачности по поглощению и рассеянию соответственно.

Для температуры в фотосфере около поверхности диска используем приближение Эддингтона:

$$T = T_{eff} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{3\tau}{4}\right)^{1/4}. \tag{8.104}$$

Определим поверхность диска как такую точку, где $\tau_{eff} = 2/3$. Это дает:

$$\begin{cases} \tau(z_0) = 2/3, & \text{крамерсовская непрозрачность,} \\ \int_0^{\tau(z_0)} \sqrt{\frac{\kappa_{ff}(\tau')}{\kappa_{th}}} d\tau^0 = 2/3, & \text{томпсоновская непрозрачность.} \end{cases} \tag{8.105}$$

Для безразмерной температуры, таким образом, начальные условия таковы:

$$\theta(0) \quad T_0 = \begin{cases} T_{eff}, & \text{крамерсовская непрозрачность,} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{3\tau}{4}\right)^{1/4} T_{eff}, & \text{томпсоновская непрозрачность.} \end{cases} \tag{8.106}$$

Теперь надо понять, как ведет себя $P(\tau)$ в фотосфере. Это нужно как для определения начального условия для давления, так и для нахождения $\tau$. Рассмотрим уравнение (8.84). Разделим обе части этого уравнения на $\kappa$ и заметим, что $\kappa\rho dz = \quad d\tau$:

$$\begin{cases} P\frac{d}{d\tau}\left(P + \frac{5\eta_{GL}^2\mu_m^2}{16\pi r^6}\sin^2\chi + hb_\phi^2 i_{2\pi}\right) = \frac{z_0 < \Omega_k^2}{\mu\kappa_0} T(\tau)^{9/2} & \text{Крамерс,} \\ \frac{d}{d\tau}\left(P + \frac{5\eta_{GL}^2\mu_m^2}{16\pi r^6}\sin^2\chi + hb_\phi^2 i_{2\pi}\right) = \frac{z_0\Omega_k^2}{\kappa_{th}} & \text{Томпсон.} \end{cases} \tag{8.107}$$

Предполагается, что вертикальная координата почти не меняется, пока в фотосфере набирается оптическая толща $\tau_{eff} = 2/3$ и $z \quad z_0$. Используя (8.104), можно проинтегрировать уравнение (8.107) по $\tau^0$ 2 $[0, \tau]$ численно от $P(\tau = 0) = 0$, чтобы получить начальное условие для давления на фотосфере $P(\tau_{eff} = 2/3)$. Для случая $\mu_m = 0$ легко получить аналитическое решение:

$$p(0) \quad P_0 = \begin{cases} \left(\frac{z_0 < \ {}_k^2 T_{eff}^{9/2}}{\kappa_0\mu}\beta\right)^{1/2} & \text{Крамерс,} \\ \frac{z_0 \ {}_k^2 \tau}{\kappa_{th}} & \text{Томпсон,} \end{cases} \tag{8.108}$$

где

$$\beta = \frac{32}{51}\left(1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{17/8}\right) \quad 0.484, \tag{8.109}$$

что полностью согласуется с Ketsaris & Shakura 1998 [35].

Решения с $\mu_m$ 6= $0$ незначительно отличаются от решений с использованием такого аналитического выражения. На рис. 8 приведен результат расчета распределения безразмерной температуры в диске по вертикальной координате $\theta(z/z_0)$ с аналитическим и численным начальными условиями для давления. Разница почти незаметна глазом: можно использовать аналитическое выражение (8.108) для начального условия на давление.

Для безразмерных потока и поверхностной плотности начальные условия ставятся просто:

$$\sigma(\zeta = 0) = 0, \tag{8.110}$$

$$q(\zeta = 0) = 1. \tag{8.111}$$

Дополнительное граничное условие следует из симметрии системы относительно экватора:

$$q(\zeta = 1) = 0. \tag{8.112}$$

Решая систему (8.99) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, надо варьировать параметр $z_0$ так, чтобы удовлетворить граничному условию (8.112).

Ketsaris & Shakura ввели четыре параметра $\Pi_{1\ldots4}$, которые в их подходе должны быть определены, решая задачу на собственные значения. Эти параметры таковы:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \dfrac{\Omega_k^2 z_0^2 \mu}{<T_c}, \\ \Pi_2 = \dfrac{\Sigma_c}{2 z_0 \rho_c}, \\ \Pi_3 = \dfrac{\alpha <T_c \Sigma_c}{W_{r\phi} \mu}, \\ \Pi_4 = \dfrac{3}{32} \left( \dfrac{T_{eff}}{T_c} \right)^4 \dfrac{\Sigma_c \kappa_0 \rho_c^{\iota}}{T_c^{\gamma+4}}. \end{cases} \tag{8.113}$$

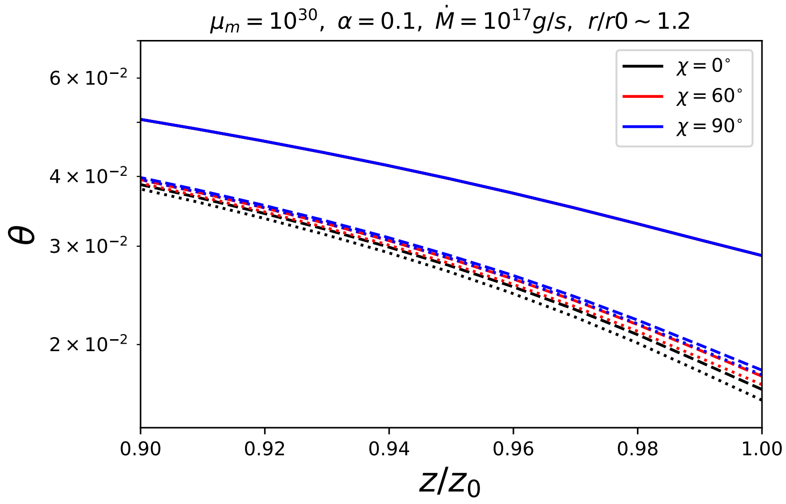
Здесь величины с обозначением ‘c’ — это величины в центре диска.

В нашем подходе эти параметры могут быть расчитаны после решения краевой задачи. С целью тестирования кода, который численно решает выписанные выше уравнения, мы сравнили некоторые посчитанные нами $\Pi$-параметры для нулевого поля с результатами Ketsaris & Shakura. Результаты совпали с точностью $10^{\;\;3}$.

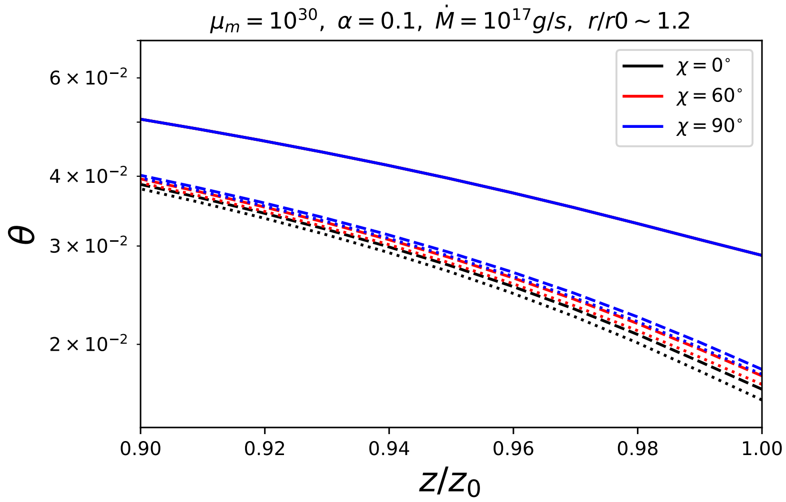
## 8.3 Результаты расчета вертикальной структуры

Основной результат настоящей работы — расчет вертикальной структуры замагниченного аккреционного диска. На рис. 9 приведено распределение параметров диска — безразмерных давления $p$, температуры $\theta$, энерговыделения $q$ — по толщине диска. Сравнивая структуру, расчитанную в приближении крамерсовской непрозрачности (рисунки слева) и томпсоновской непрозрачности (рисунки справа), мы пришли к выводу, что выбранная модель непрозрачности слабо меняет распределение параметров в диске. По этой причине далее в работе всюду в расчетах используется крамерсовская непрозрачность.

С другой стороны, сравнив кривые для стандартного диска и моделей пересоединения и диффузии, можем утверждать, что такие аккреционные диски, по-видимому, подобны друг другу с большой точностью, а магнитное поле почти не меняет относительной формы профилей решений уравнений вертикальной структуры диска даже при сильных полях (имеется в виду, даже при таких полях, что при дальнейшем увеличении поля угловая скорость существенно отличается от кеплеровской или даже обращается в нуль, см. раздел 5). Заметим, что, хотя аккреционные диски без магнитного поля и с магнитным полем подобны, но абсолютное значение полутолщины $z_0$ может существенно отличаться от стандартного диска, см. раздел 9. Поскольку параметр $z_0$ входит в характерные значения $P_0, \Sigma_0, T_0$, то абсолютные значения температуры, давления и других физических величин в замагниченных дисках могут отличаться от заметно отличаться от стандартных.




(a)




(b)

Рис. 8: Распределение температуры в диске с крамерсовской непрозрачностью, вычисленнное с аналитическим начальным условием на P, как в уравнении (8.108) (рисунок сверху), и с начальным условием, полученным численным решением уравнения (8.107) (рисунок снизу). Сплошная линия — результат для стандартной модели без магнитного поля, пунктирная линия — для модели диффузии поля, прерывистая — для модели пересоединения линий поля. Вертикальная структура расчитана на расстоянии от центра $r = 1.3 \quad 10^7$ см или $r \quad 1.2 r_0$, если $r_0$ взято для случая $\chi = 90$ модели диффузии. Магнитный момент указан в единицах Гс см$^3$.

Магнитное поле меняет начальные условия для давления газа и, косвенно, для температуры, и поэтому кривые для замагниченных дисков лежат, как правило, ниже кривых для стандартного диска. Однако, разница между ними существенна, по-видимому, лишь для эффектов на поверхности диска — что может быть важно для расчета спектра излучения диска, см. раздел 7 — и почти незаметна в центре диска.

Исследуеум влияние параметров диска и НЗ ($\dot{M}, \alpha, \mu_m$) на вертикальную струкруту аккреционного диска. Это важно хотя бы потому, что влияние угла $\chi$ на структуру диска зависит от этих параметров. На рис. 10 показано распределение температуры по вертикали в диске при изменении темпа аккреции, альфа-параметра и магнитного поля НЗ.

Общая закономерность — чем сильнее влияние магнитного поля (чем больше параметр $\xi =$

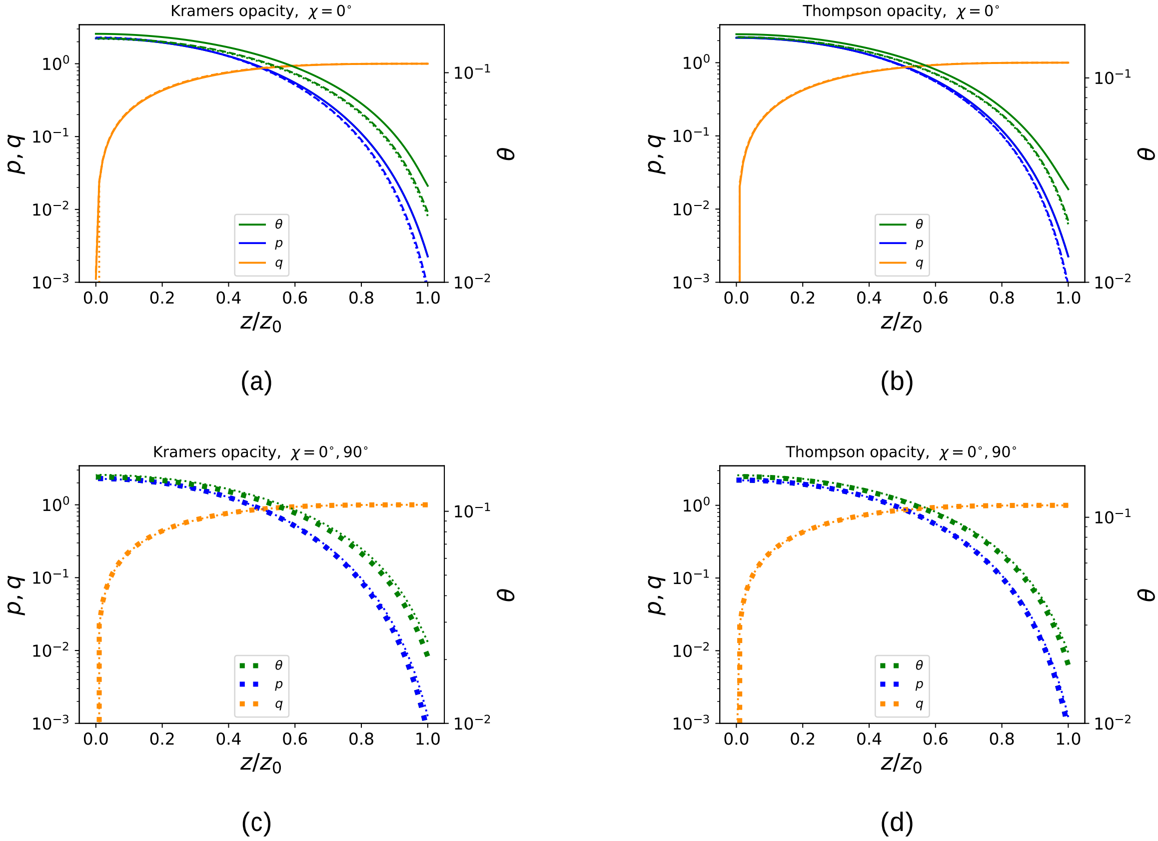
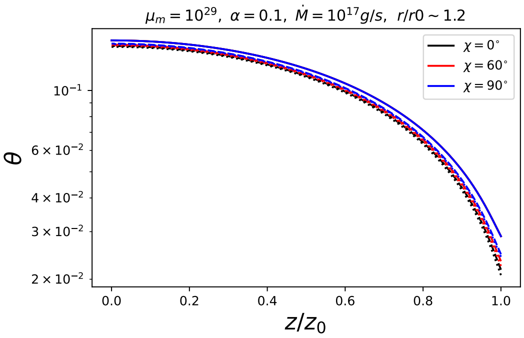


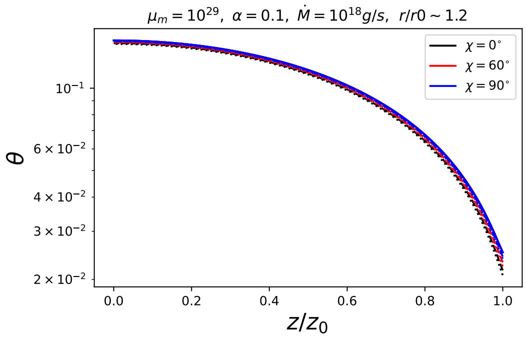

Рис. 9: Распределение безразмерных давления $p$, температуры $\theta$, энерговыделения $q$ по толщине диска. Два верхних рисунка — 9(a) и 9(b) — посчитанная для нулевого угла $\chi = 0$ вертикальная структура в приближении крамерсовской (слева) и томпсоновской (справа) непрозрачности. Сплошная линия — результат для стандартной модели без магнитного поля, пунктирная линия — для модели диффузии, прерывистая — для модели пересоединения. Нижние рисунки — вариации вертикальной структуры в зависимости от угла $\chi$ для модели диффузии поля с крамерсовской (слева) и томпсоновской (справа) непрозрачностью. Толстыми линиями отмечены модели с $\chi = 0$ , тонкими — $\chi = 90$ . Вертикальная структура расчитана на расстоянии от центра $r = 1.4 \quad 10^7$ см или $r \quad 1.3 r_0$ ($r_0$ взято для случая $\chi = 90$ в модели диффузии). Темп аккреции $\dot{M} = 10^{17}$г/с, магнитыінй момент $\mu = 10^{29}$ Гс см$^3$, $\alpha = 0.1$ для всех рисунков.

$r_a/r_c$), тем сильнее угол $\chi$ влияет на структуру поля. При увеличении темпа аккреции это влияние снижается, а при увеличении магнитного поля возрастает. Кроме того, поскольку для стандартного диска $\Sigma$ / $\dot{M}/\alpha$, структура меняется похожим образом, если мы увеличиваем темп аккреции в 10 раз при фиксированном $\alpha$-параметре и если мы уменьшаем $\alpha$-параметр в 10 раз при фиксированном темпе аккреции.

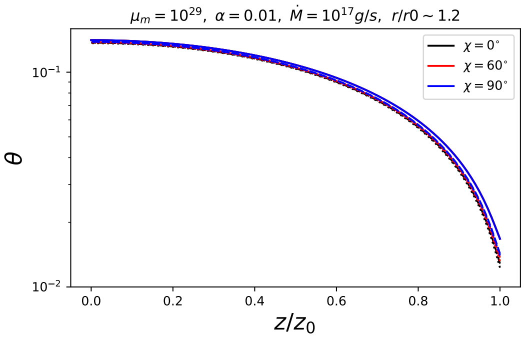
Впрочем, зависимость от угла и от модели настолько незначительна (до 10 %), что в расчетах вертикальной структуры можно просто полагать $\chi = 0$, и тогда из выражения для $W_{r\phi}$ выпадает член, пропорциональный $z/r$, что ускоряет вычисления.



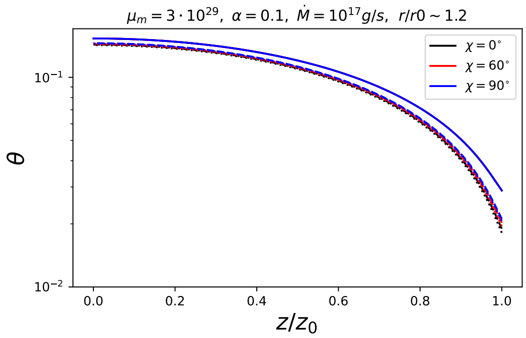

(a)




(b)




(c)




(d)

Рис. 10: Вариации вертикальной структуры на примере безразмерной температуры с параметрами диска (даны на графиках). Рис. 10(a) это в точности рис. 8(b), он приведен как референс -набор параметров, который мы будем называть 'обычными' ($\xi = 19$). Параметры на рис. 10(b) 'обычные', кроме темпа аккреции, который в 10 раз больше ($\xi = 10$). На рис. 10(c) все параметры 'обычные', кроме $\alpha$-параметра, который в 10 раз меньше ($\xi = 19$). На рис. 10(d) параметры 'обычные', но магнитный момент втрое больше ($\xi = 36$). Сплошная линия — результат для стандартной модели без магнитного поля, пунктирная линия — для модели диффузии, прерывистая — для модели пересоединения. Частота вращения НЗ $f_{200} = 1$.

# 9 Радиальная структура

На рис. 11 приведена зависимость относительной полутолщины диска $z(r)/r$ от расстояния до НЗ. Исследуем, возможно ли такое, что на протяжении всей рентгеновской вспышки аккрецирующего милисекундного пульсара радиальная структура существенно отличается от стандартной. Для этого возьмем характерный для пика вспышки темп аккреции $\dot{M}_{17} = 1$ и будем увеличивать магнитный момент звезды. При магнитных моментах звезды $B$ . $10^{28}$ Гс см$^3$ основное отличие от стандартного диска исходит из отличия положения внутренней границы диска $r_0$ от положения границы в стандартном диске. Даже при сравнительно небольших полях $r_0$ может стать в несколько раз больше $R_{\rm ISCO}$, из-за чего энерговыделение падает (все рассуждения про зависимость энерговыделения от угла $\chi$, приведенные в разделе 6.4, справедливы и здесь).

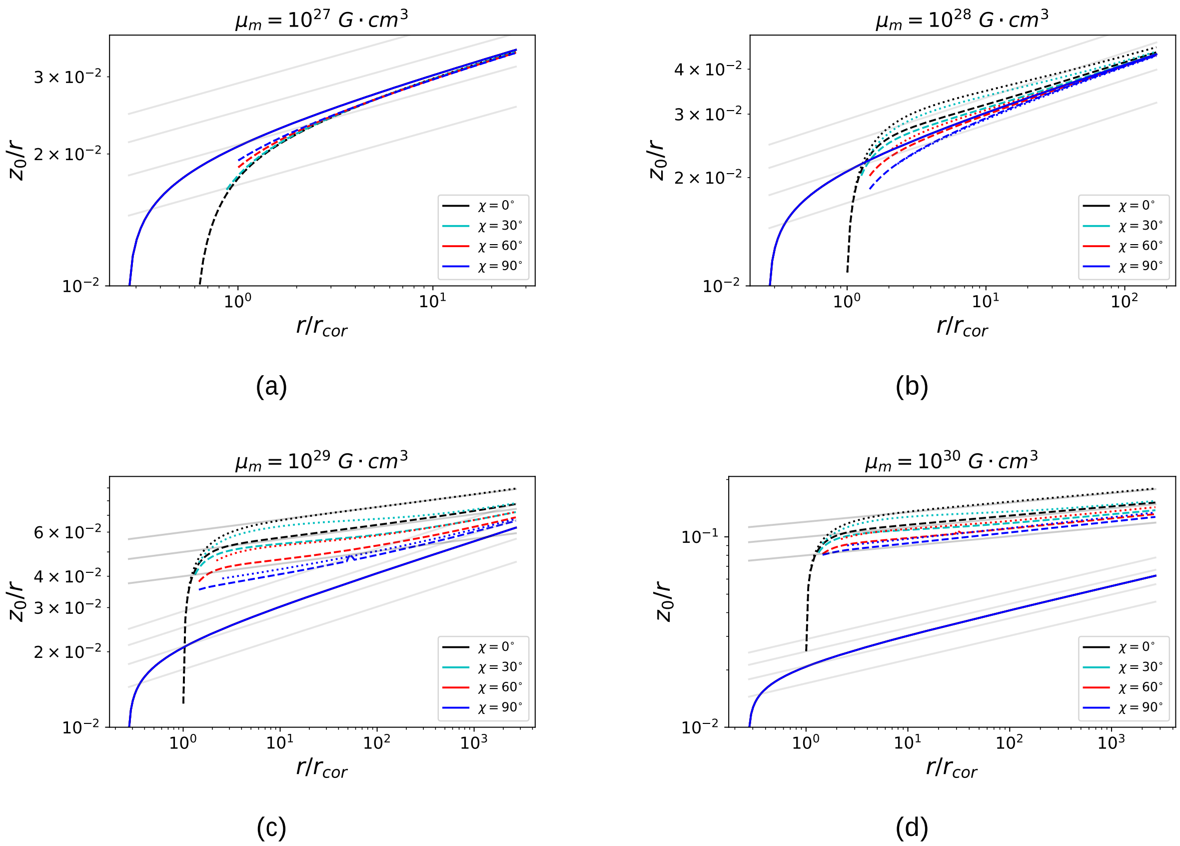



Рис. 11: Зависимость относительной полутолщины диска $z_0(r)/r$ от расстояния до центра НЗ, выраженного в единицах радиуса коротации. Параметры системы постоянны за исключением дипольного момента $\mu_m$. Рис. 11(a) соответствует $\mu_m = 10^{27}$ Гаусс см$^3$. На рис. 11(b), 11(c), 11(d) магнитный момент больше в 10, 100 и 1000 раз. $\dot{M} = 10^{17}$ г/с. Сплошная линия — результат для стандартной модели без магнитного поля, пунктирная линия — для модели диффузии, прерывистая — для модели пересоединения. На всех рисунках бледным показана асимптотика $z/r \quad r^{1/8}$, а на двух нижних рисунках еще асимптотика $z/r \quad r^{1/20}$.

В реальной рентгеновской вспышке, конечно, меняется не магнитное поле НЗ, а темп аккреции. Зафиксируем магнитный момент $\mu_{26} = 1$, характерный для таких вспышек, и будем уменьшать темп аккреции от пика $\dot{M}_{17} = 1$ на несколько порядков. На рис. 12 показано, как полутолщина диска меняется в течение типичной рентгеновской вспышки. При больших темпах аккреции вещество “продавливает” магнитосферу до $r_0 = R_{\rm ISCO}$, и структура диска неотличима от стандартной. С уменьшением темпа аккреции магнитосфера отодвигает внутреннюю границу вязкого диска дальше, однако структура все еще квази-станартная, поскольку магнитные члены в $W_{r\phi}$ и в уравнениях вертикальной структуры пренебрежимо малы.

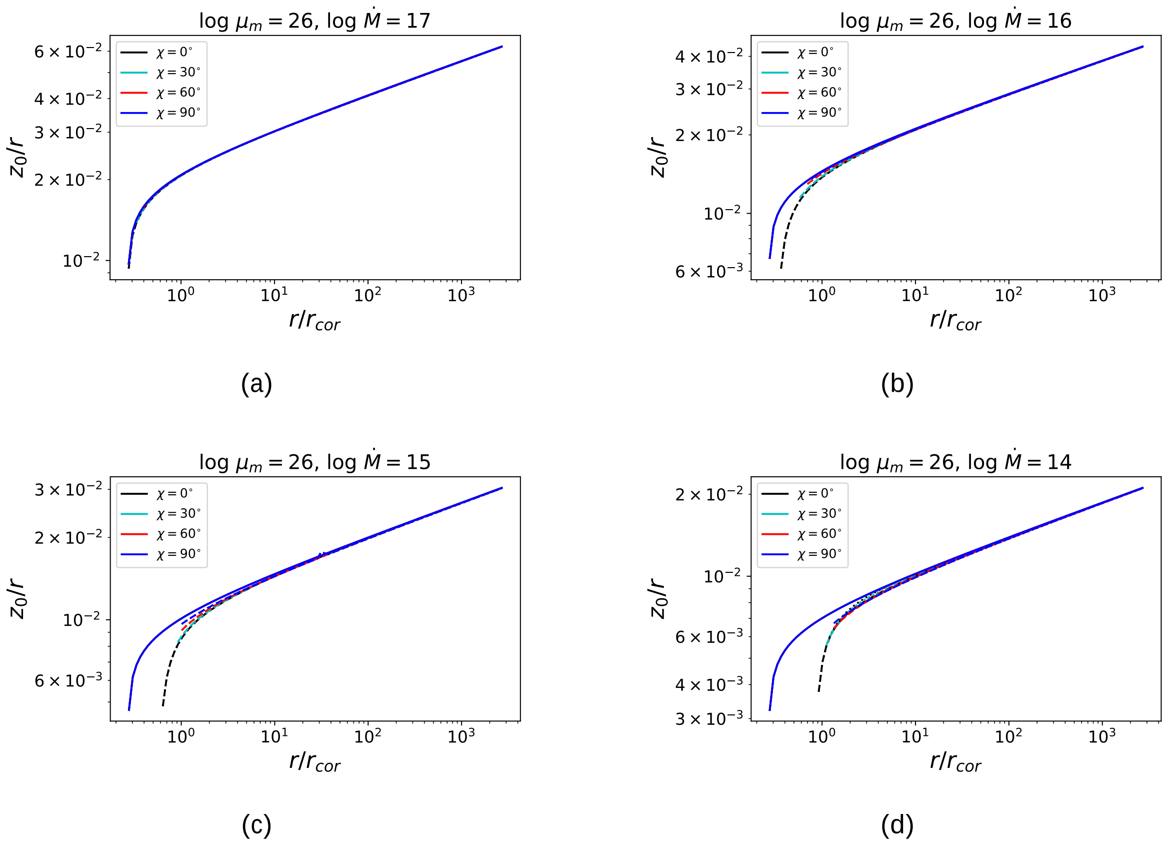



Рис. 12: Зависимость относительной полутолщины диска $z_0(r)/r$ от расстояния до центра НЗ. Параметры системы постоянны за исключением темпа аккреции $\dot M$, что соответствует затуханию аккреции во время рентгеновской вспышки. Рис. 12(a) соответствует $\dot M = 10^{17}$ г/с. На рис. 12(b), 12(c), 12(d) темп аккреции меньше в 10, 100 и 1000 раз. $\mu_{26} = 1$. Сплошная линия — результат для стандартной модели без магнитного поля, пунктирная линия — для модели диффузии, прерывистая — для модели пересоединения.

Зная параметры $\Pi_{1\ldots4}$, можно расчитать радиальную структуру аккреционного диска (Suleimanov et al. 2007 [36]). Решая (8.113) как систему алгебраических уравнений относительно $z_0(r), T_c, \Sigma_c, \rho_c$ для случая крамерсовской непрозрачности, получаем, например, для $z_0(r)$:

$$z_0(r)/r = 0.0205 m_x{}^{3/8} \dot M_{17}^{3/20} \alpha^{\;1/10} R_{10}^{1/8} g(r)^{3/20} \mu_{0.6}{}^{3/8} \Pi_z, \tag{9.114}$$

где

$$\Pi_z = \left(\Pi_1^{19} \Pi_2{}^2 \Pi_3^4 \Pi_4{}^2\right)^{1/40}. \tag{9.115}$$

При $r \gg 1$ для стандартного диска $g(r) \approx 1$, а для сильного магнитного поля $g(r) \propto 1/\sqrt{r}$ (см. раздел 7 для подробного обсуждения), поэтому из уравнения (9.114) получаем асимптотики:

$$\begin{cases} z_0(r)/r \propto r^{1/8}, & \text{слабое поле,} \\ z_0(r)/r \propto r^{1/20}, & \text{сильное поле.} \end{cases} \tag{9.116}$$

Первая асимптотика — известное выражение для зоны C стандартного диска. Вторая асимптотика совпадает с выраженем для мертвых дисков (Sunyaev & Shakura 1977 [31]).

Для стандартного диска $\Pi_z$ изменяется в диапазоне $[1, 3]$ для широкого разброса параметров диска, можно использовать аппроксимацию $\Pi_z \quad 2.6$ как характерное значение (Suleimanov et al. 2007 [36]).

Подведем итог. При больших $\xi$ заметно модифицируется тензор $W_{r\phi}$, за счет чего по сравнению со стандартным диском растет энергия, выделяемая вязкими силами, а также магнитное давление, которое стремится “раздуть” диск, сделать его толще. Заметим, что для того, чтобы радиальная структура заметно отличалась от стандартной даже в пике вспышки, необходимо поле $\log \mu_m \quad 29$, что нереалистично для частот порядка вращения НЗ $f = 100 \quad 500$ Hz при квазистационарной аккреции. Согласно общепринятой картине в случае квазистационарных процессов при таких параметрах НЗ будет в стадии “эжектора”, и аккреция не будет происходить (Shvartsman 1971 [38], Illarionov & Sunyaev 1975 [39]). Однако существенная нестационарность процессов может изменить такое положение дел. Такие объекты могут существовать, если на недавно рожденный пульсар падает много вещества, а механизм пропеллера работает неэффективно (например, вещество может накапливаться на границе магнитосферы и продавливать её внутрь радиуса коротации).

# 10 Заключение

В настоящей работе исследована структура аккреционных дисков вокруг замагниченных звезд на примере дисков вокруг нейтронных звезд.

Посчитав неочевидным предположение о том, что угловая скорость в замагниченных дисках обычно считается кеплеровской, в разделе 5 мы кратко исследовали влияние магнитного поля на угловую скорость в диске. Оказалось, что такое приближение оправдано для магнитных моментов нейтронной звезды $\mu_m < 3 \quad 10^{29}$ Гс см$^3$ для темпа аккреции $\dot{M} \quad 10^{17}$ г/с (при характерной для аккрецирующих милисекундных пульсаров частоте НЗ $f_{200} = 1$).

В разделе 6 получены общие уравнения переноса углового момента, применимые для любой модели наведенного тороидального магнитного поля в диске. Получены и проанализированы уравнения для положения внутреннего радиуса вязкого диска. Характерной особенностью нашего подхода является сложная зависимость внутреннего радиуса $r_0$ от темпа аккреции. При больших темпах аккреции $r_0 \ / \ \dot{M}^{\ 2/7}$, что характерно для простейшей модели взаимодействия магнитосферы с диском в предположении постоянства коэффициента пропорциональности между внутренним и альфеновским радиусами $r_0/r_a = const$. При малых темпах аккреции внутренний радиус стремится к радиусу коротации (при нулевом угле $\chi$ наклона магнитной оси НЗ к ее оси вращения) или к радиусу, чуть превышающему коротационный радиус (при $\chi > 0$).

В предположении тороидального магнитного поля, чья генерация лимитируется либо турбулентной диффузией поля, либо пересоединением линий поля в короне диска, выведены выражения для $r\phi$-компоненты вязкого тензора в зависимости от угла наклонения магнитной оси диполя в виде разложения по малому параметру $z(r_0)/r_0$, относительной полутолщины диска на внутреннем радиусе. Выражение для вязкого тензора сводится к обычному выражению Шакуры и Сюняева в случае нулевого магнитного поля, а в случае $\chi = 0$ к выражениям, полученным в KR07.

Спектр диска в простейшем приближении чернотельного излучения был расчитан в разделе 7. При малых полях спектр квази-стандартный с тем отличием, что внутренний радиус не равен $R_{\mathrm{ISCO}}$. При больших полях спектр доминирован магитным полем. В настоящей работе не было попыток детального моделирования спектров, однако показано, что для быстровращающихся аккрецирующих милисекундных пульсаров с обычным для таких объектов магнитным полем на последних стадиях рентгеновской вспышки спектр может поменять вид со стандартного на доминированный магнитным полем (спектр мертвого диска).

В разделе 8 мы описали метод расчета веритикальной структуры замагниченного аккреционного диска. В предположении доминирования газового давления и аналитической непрозрачности (крамерсовской или томпсоновской) расчитано распределение температуры, давления, потока тепла по высоте в диске. Оказалось, что вертикальная стурктура дисков, нормированная на характерные значения, очень слабо зависит от магнитного поля (в том числе и от модели магнитного поля) и почти не зависит от угла $\chi$ в рамках предположения, что наведенное тороиальное поле $b_\phi$ и его производная по $z$ равны нулю внутри диска. Таким образом, для вычисления вертикальной структуры предположение $\chi = 0$ неплохо выполняется.

В разделе 9 исследован профиль диска. Полутолщина $z(r)$ является параметром задачи, и мы самосогласованно нашли ее с помощью методов, описанных в разделе 8. Оказалось, что относительная полутолщина $z(r)/r$ может существенно отличаться от стандартного значения. При малых полях диск становится тоньше за счет того, что внутренний радиус диска увеличивается относительно стандартного. При больших полях магнитные члены начинают доминировать в выражении для энерговыделения в диске, и зависимость $z(r)/r$ меняет вид, становясь более пологой. Мы считаем, что наша модель с оговорками может быть применима к мертвым дискам, то есть таким, в которых аккреция на центральный объект остановлена чем-то, например, магнитосферой. Однако, оговоримся, что аналогия с мертвыми дисками неточна, потому что в нашем подходе нельзя говорить о напряжениях, действующих на внутренний край диска и удерживающих его от аккреции (см. раздел 6).

# 11 Благодарности

Автор выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (номер гранта 21-2-1-30-1) и гранту Российского Научного Фонда (номер гранта 21-12-00141).

# Список литературы


[1] P. Ghosh and F. K. Lamb. Accretion by rotating magnetic neutron stars. II. Radial and vertical structure of the transition zone in disk accretion. ApJ, 232:259–276, August 1979.

[2] P. Ghosh, F. K. Lamb, and C. J. Pethick. Accretion by rotating magnetic neutron stars. I. Flow of matter inside the magnetosphere and its implications for spin-up and spin-down of the star. ApJ, 217:578–596, October 1977.

[3] P. Ghosh and F. K. Lamb. Accretion by rotating magnetic neutron stars. III. Accretion torques and period changes in pulsating X-ray sources. ApJ, 234:296–316, November 1979.

[4] Y. M. Wang. Disc accretion by magnetized neutron stars : a reassessment of the torque. A&A, 183:257–264, September 1987.

[5] R. V. E. Lovelace, M. M. Romanova, and G. S. Bisnovatyi-Kogan. Spin-up/spin-down of magnetized stars with accretion discs and outflows. MNRAS, 275(2):244–254, July 1995.

[6] C. G. Campbell. The inner structure of an accretion disc around a magnetic neutron star. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 63(1):179–196, January 1992.

[7] L. Naso and J. C. Miller. An investigation of magnetic field distortions in accretion discs around neutron stars. I. Analysis of the poloidal field component. A&A, 521:A31, October 2010.

[8] L. Naso and J. C. Miller. An investigation of magnetic field distortions in accretion discs around neutron stars. II. Analysis of the toroidal field component. A&A, 531:A163, July 2011.

[9] C. G. Campbell and P. M. Heptinstall. Disc structure around strongly magnetic accretors: a full disc solution with turbulent diffusivity. MNRAS, 299(1):31–46, August 1998.

[10] C. G. Campbell and P. M. Heptinstall. Disc structure around strongly magnetic accretors: a full disc solution with buoyancy diffusivity. MNRAS, 301(2):558–568, December 1998.

[11] C. G. Campbell. The mechanism of disc disruption by strongly magnetic accretors. MNRAS, 403(3):1339–1352, April 2010.

[12] Steven A. Balbus and John F. Hawley. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis. ApJ, 376:214, July 1991.

[13] Steven A. Balbus and John F. Hawley. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of Modern Physics*, 70(1):1–53, January 1998.

[14] S. B. Tessema and U. Torkelsson. The structure of thin accretion discs around magnetised stars. A&A, 509:A45, January 2010.

[15] John F. Hawley, Charles F. Gammie, and Steven A. Balbus. Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo. ApJ, 464:690, June 1996.

[16] Y. M. Wang. Torque Exerted on an Oblique Rotator by a Magnetically Threaded Accretion Disk. ApJ, 475(2):L135–L137, February 1997.

[17] E. Bozzo, S. Ascenzi, L. Ducci, A. Papitto, L. Burderi, and L. Stella. Magnetospheric radius of an inclined rotator in the magnetically threaded disk model. A&A, 617:A126, October 2018.

[18] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. A&A, 24:337–355, January 1973.

[19] W. Kluźniak and S. Rappaport. Magnetically Torqued Thin Accretion Disks. ApJ, 671(2):1990–2005, December 2007.

[20] N. I. Shakura. Disk Model of Gas Accretion on a Relativistic Star in a Close Binary System. Soviet Ast., 16:756, April 1973.

[21] L. Naso, W. Kluźniak, and J. C. Miller. Magnetic field structure and torque in accretion discs around millisecond pulsars. MNRAS, 435(3):2633–2649, November 2013.

[22] S. Kato, J. Fukue, and S. Mineshige. Black-hole accretion disks — towards a new paradigm —. *Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm —, 549 pages, including 12 Chapters, 9 Appendices, ISBN 978-4-87698-740-5, Kyoto University Press (Kyoto, Japan), 2008.*, -1, 02 2008.

[23] V. M. Lipunov and N. I. Shakura. Interaction of the accretion disk with the magnetic field of a neutron star. *Soviet Astronomy Letters*, 6:14–17, February 1980.

[24] Dong Lai. Magnetically Driven Warping, Precession, and Resonances in Accretion Disks. ApJ, 524(2):1030–1047, October 1999.

[25] M. M. Romanova, A. V. Koldoba, G. V. Ustyugova, A. A. Blinova, D. Lai, and R. V. E. Lovelace. 3D MHD simulations of accretion on to stars with tilted magnetic and rotational axes. MNRAS, 506(1):372–384, September 2021.

[26] Y. M. Wang. On the Torque Exerted by a Magnetically Threaded Accretion Disk. ApJ, 449:L153, August 1995.

[27] Galina Lipunova, Konstantin Malanchev, and Nikolay Shakura. The Standard Model of Disc Accretion. In Nikolay Shakura, editor, *Astrophysics and Space Science Library*, volume 454 of *Astrophysics and Space Science Library*, page 1, January 2018.

[28] M. Revnivtsev, E. Churazov, K. Postnov, and S. Tsygankov. Quenching of the strong aperiodic accretion disk variability at the magnetospheric boundary. A&A, 507(3):1211–1215, December 2009.

[29] M. H. Finger, R. B. Wilson, and B. A. Harmon. Quasi-periodic Oscillations during a Giant Outburst of A0535+262. ApJ, 459:288, March 1996.

[30] I. Caballero, K. Pottschmidt, A. Santangelo, L. Barragan, D. Klochkov, C. Ferrigno, J. Rodriguez, P. Kretschmar, S. Suchy, D. M. Marcu, D. Mueller, J. Wilms, I. Kreykenbohm, R. E. Rothschild, R. Staubert, M. H. Finger, A. Camero-Arranz, K. Makishima, T. Mihara, M. Nakajima, T. Enoto, W. Iwakiri, and Y. Terada. The Be/X-ray binary A0535+26 during its recent 2009/2010 outbursts. *arXiv e-prints*, page arXiv:1107.3417, July 2011.

[31] R. A. Siuniaev and N. I. Shakura. Disc reservoirs in binary systems and their observational appearances. *Pisma v Astronomicheskii Zhurnal*, 3:262–266, June 1977.

[32] John R. Weaver and Keith Horne. Dust and the intrinsic spectral index of quasar variations: hints of finite stress at the innermost stable circular orbit. MNRAS, 512(1):899–916, May 2022.

[33] Duncan K. Galloway, Craig B. Markwardt, Edward H. Morgan, Deepto Chakrabarty, and Tod E. Strohmayer. Discovery of the Accretion-powered Millisecond X-Ray Pulsar IGR J00291+5934. ApJ, 622(1):L45–L48, March 2005.

[34] Tiziana Di Salvo and Andrea Sanna. Accretion powered X-ray millisecond pulsars. *arXiv e-prints*, page arXiv:2010.09005, October 2020.

[35] N. A. Ketsaris and N. I. Shakura. On the Calculation of the Vertical Structure of Accretion Discs. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 15:193, January 1998.

[36] V. F. Suleimanov, G. V. Lipunova, and N. I. Shakura. The thickness of accretion $\alpha$-disks: Theory and observations. *Astronomy Reports*, 51(7):549–562, July 2007.

[37] Ya. B. Zel'dovich and N. I. Shakura. X-Ray Emission Accompanying the Accretion of Gas by a Neutron Star. Soviet Ast., 13:175, October 1969.

[38] V. F. Shvartsman. Neutron Stars in Binary Systems Should Not Be Pulsars. Soviet Ast., 15:342, October 1971.

[39] A. F. Illarionov and R. A. Sunyaev. Why the Number of Galactic X-ray Stars Is so Small? A&A, 39:185, February 1975.

## Приложение

## A Влияние поправки порядка относительной полутолщины к вязкому тезору

Приведем иллюстрации к значимости поправки порядка $\delta_0 = z(r_0)/r_0$ в вязком тензоре в формуле (6.57) на примере модели диффузии. На рисунке 13 на примере зависимостей $z(r)/r$ показано, как радиальная структура диска меняется в зависимости от наличия поправки. При нулевом угле поправка, очевидно, нулевая, и растет с увеличением угла. Она становится существенной при углах, близких к $90$ , поскольку при таких наклонениях магнитной оси основной член стремится к нулю, а поправка достигает максимального значения. Разница между $\chi = 0$ и $\chi = 90$  уменьшается по сравнению с моделью без поправки. Кроме того, с включенной поправкой более оправдано приближение $z(r)/r \quad const$, которым мы пользуемся.

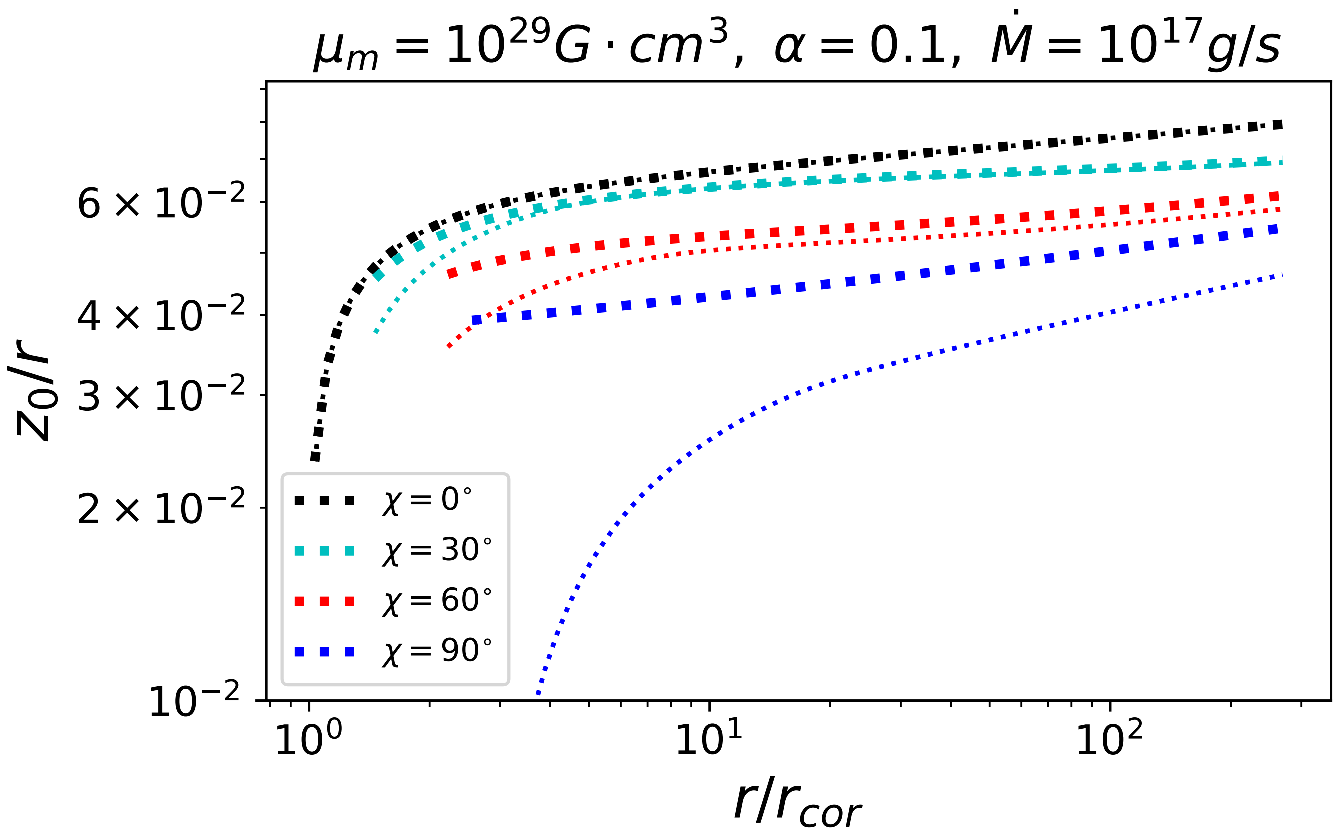



Рис. 13: Относительная полутолщина диска как функция расстояния при нескольких углах $\chi$ для модели диффузии поля. Толстыми линиями показаны кривые с включенной поправкой, тонкой — без этой поправки.

На рис. 14 показано, как спектр меняется в зависимости от того, включена ли поправка в вязкий тензор. Результаты, в общем, те же, что и для радиальной структуры: если мы хотим моделировать диск в том числе и при больших углах $\chi$, в уравнениях необходимо удерживать члены по порядку хотя бы до $z_0/r_0$ в первой степени, не меньше. Иначе мы получаем не слишком физичный результат: если диполь лежит в плоскости диска, он почти не влияет на структуру

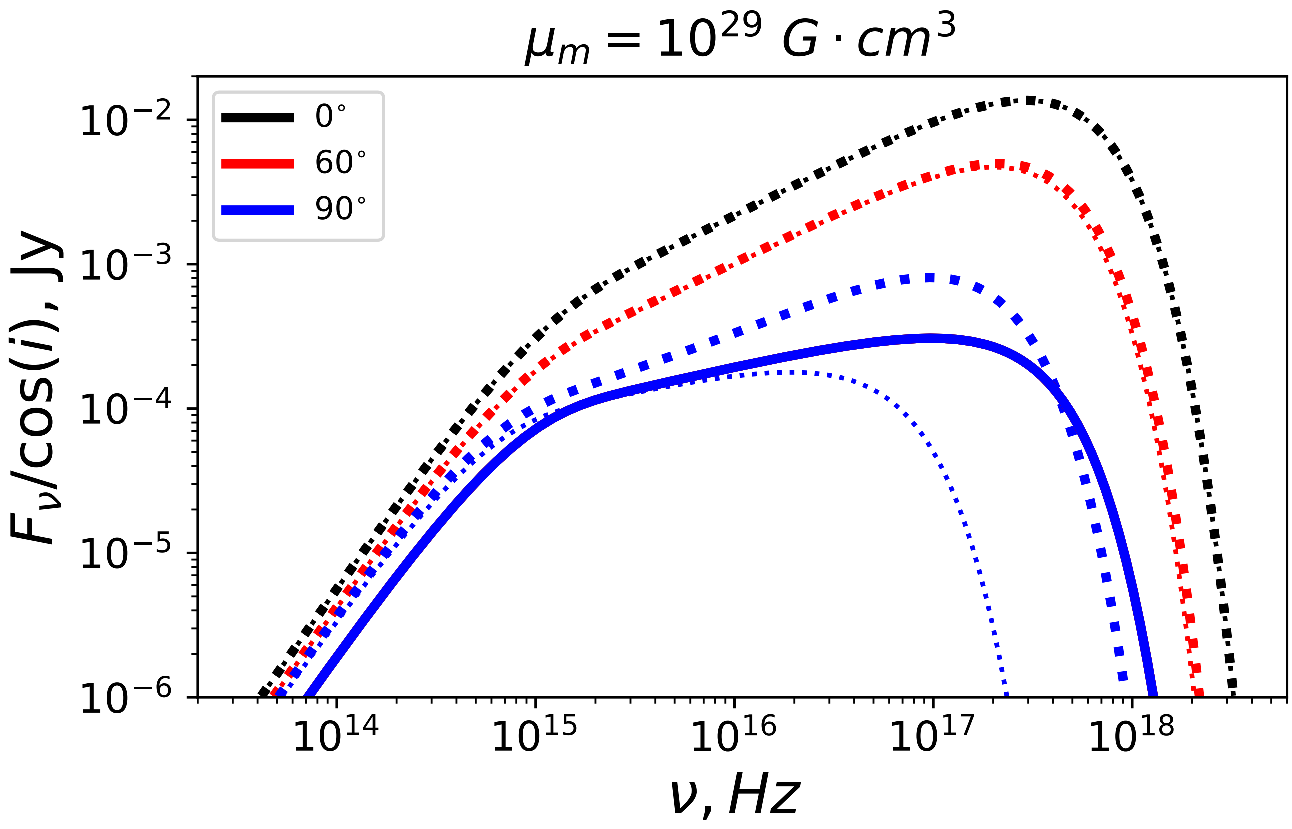



Рис. 14: Модельный спектр диска при нескольких углах $\chi$ для модели диффузии поля. Толстыми линиями показаны кривые с включенной поправкой, тонкой — без этой поправки.

диска. Выражения, включающие эффекты порядка $z/r$, видимо, честнее учитывают эффекты магнитного поля, хоть и более громоздки.